

Диофантовы уравнения

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

Линейное диофантово уравнение с двумя переменными — это уравнение в целых числах вида

$$ax + by = c$$

относительно переменных x и y (числа a и b отличны от нуля).

1 Найдите какое-нибудь решение уравнения $10x + 6y = 28$.

2 Докажите, что диофантово уравнение имеет решение (*разрешимо*) тогда и только тогда, когда c делится на (a, b) .

Решив следующую задачу, вы узнаете один из основных способов решения диофантовых уравнений.

3 **a** Придумайте, как найти какое-нибудь одно (*частное*) решение диофантова уравнения (вспомните алгоритм Евклида!).

b Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — два решения уравнения $ax + by = c$. Докажите, что $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ — решение *однородного* уравнения $ax + by = 0$.

c Пусть $a' = a : (a, b), b' = b : (a, b)$. Докажите, что все решения однородного уравнения $ax + by = 0$ имеют вид $(b'n, -a'n)$, где n — любое целое число.

4^v Найдите ВСЕ решения уравнения $10x + 6y = 28$.

5 Сколько точек с целыми координатами расположено на прямой

$$y = \frac{8}{13}x + \frac{6}{13}$$

при $-100 \leq x \leq 50$?

6 На площади стоят дяди и тётки. У каждого дяди в кармане было 15 рублей, у каждой тётки — 43 рубля. По площади прошёл вор и незаметно украл все деньги. Какое наибольшее количество людей могло стоять на площади, если вор украл всего 2022 рубля?

7^v Ответьте на вопрос (И. Акулич. «Квант», №4, 1995):

Шли сорок мышей, несли сорок грошей,

Две мыши поплоче несли по два гроша,

Немало мышей — вообще без грошей.

Большие совсем тащили по семь.

А остальные несли по четыре.

Сколько мышей шли без грошей?

8 В обращении имеются только монеты в 3 и 10 дублонов.

a Какие суммы ими можно уплатить, если продавец может давать сдачу?

b Можно ли этими монетами уплатить без сдачи сумму в 17 дублонов?

c * Какие суммы можно уплатить этими монетами без сдачи?

9^v Решите в целых числах уравнение $2x + 3y + 5z = 13$.

10 На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?

11 Решите в целых числах уравнение $xy + 3x - 5y + 3 = 0$.

12★ Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7 = y^2$.