

# Диофантовы уравнения

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

**Линейное диофантово уравнение с двумя переменными** — это уравнение в целых числах вида

$$ax + by = c$$

относительно переменных  $x$  и  $y$  (числа  $a$  и  $b$  отличны от нуля).

**1** Найдите какое-нибудь решение уравнения  $10x + 6y = 28$ .

**2** Докажите, что диофантово уравнение имеет решение (*разрешимо*) тогда и только тогда, когда  $c$  делится на  $(a, b)$ .

Решив следующую задачу, вы узнаете один из основных способов решения диофантовых уравнений.

**3** **a** Придумайте, как найти какое-нибудь одно (*частное*) решение диофантова уравнения (вспомните алгоритм Евклида!).

**b** Пусть  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  — два решения уравнения  $ax + by = c$ . Докажите, что  $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$  — решение *однородного* уравнения  $ax + by = 0$ .

**c** Пусть  $a' = a : (a, b), b' = b : (a, b)$ . Докажите, что все решения однородного уравнения  $ax + by = 0$  имеют вид  $(b'n, -a'n)$ , где  $n$  — любое целое число.

**4<sup>v</sup>** Найдите ВСЕ решения уравнения  $10x + 6y = 28$ .

---

**5** Сколько точек с целыми координатами расположено на прямой

$$y = \frac{8}{13}x + \frac{6}{13}$$

при  $-100 \leq x \leq 50$ ?

**6** На площади стоят дяди и тётки. У каждого дяди в кармане было 15 рублей, у каждой тётки — 43 рубля. По площади прошёл вор и незаметно украл все деньги. Какое наибольшее количество людей могло стоять на площади, если вор украл всего 2022 рубля?

**7<sup>v</sup>** Ответьте на вопрос (И. Акулич. «Квант», №4, 1995):

Шли сорок мышей, несли сорок грошей,

Две мыши поплоче несли по два гроша,

Немало мышей — вообще без грошей.

Большие совсем тащили по семь.

А остальные несли по четыре.

Сколько мышей шли без грошей?

**8** В обращении имеются только монеты в 3 и 10 дублонов.

**a** Какие суммы ими можно уплатить, если продавец может давать сдачу?

**b** Можно ли этими монетами уплатить без сдачи сумму в 17 дублонов?

**c** \* Какие суммы можно уплатить этими монетами без сдачи?

---

**9<sup>v</sup>** Решите в целых числах уравнение  $2x + 3y + 5z = 13$ .

**10** На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика?

**11** Решите в целых числах уравнение  $xy + 3x - 5y + 3 = 0$ .

**12★** Решите в натуральных числах уравнение  $2^x + 7 = y^2$ .