Основная теорема арифметики

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

> Вы думаете, все так просто?
> Все, действительно, просто.
> Но совсем не так.
>
> А.Эйнштейн

Целое положительное число p называется **простым***, если его нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел, ни одно из которых не равно единице.*

Основная теорема арифметики *утверждает, что*

> *Всякое целое положительное число, кроме единицы, может быть представлено в виде произведения простых сомножителей и притом единственным способом, с точностью до порядка множителей.*

Вы, конечно, уже знаете ОТА и часто использовали ее в доказательствах. Давайте поймем что ОТА не очевидна, и приведем её доказательство.

Попробуем построить пример в котором основная теорема арифметики окажется неверной. Забудем ненадолго о существовании нечетных чисел и станем считать, что есть одни только четные числа. С одними четными числами можно проделывать все те же арифметические операции, что и со всеми целыми числами, ведь сумма и произведение двух четных чисел — четное число, и нам нет необходимости вспоминать о нечетных (деление, конечно, определено не всегда, но и для всех целых деление нацело не всегда осуществимо). В арифметике четных чисел нельзя, к примеру, разделить без остатка 6 на 2, т.к. получится 3, число не входящее в нашу арифметику. По тем же причинам 6 является простым числом.

Теперь мы все знаем для того, чтобы придумать один из множества примеров, "опровергающих" основную теорему арифметики:

$$10 \cdot 6 = 60 = 30 \cdot 2.$$

Число 60 разлагается в произведение простых двумя различными способами, а числа 2, 6, 10 и 30 являются простыми числами в арифметике четных чисел (убедитесь в этом сами).

Доказательство основной теоремы арифметики

Основная теорема арифметики верна в арифметике всех целых чисел, но как и любая теорема, нуждается в доказательстве. Для ее доказательства необходимы три вспомогательные леммы.

Определение. Числа a и b называются **взаимно простыми**, если $(a, b) = 1$.

Лемма 1. Если a и b взаимно просты, то существуют целые x и y такие, что $ax + by = 1$

Лемма 2. Если $(a, b) = 1$ и $ac \,\vdots\, b$, то $c \,\vdots\, b$.

Лемма 3. Если p — простое число, то любое целое число n либо делится на p, либо взаимно просто с ним.

Упражнение. Завершите доказательство теоремы и выясните почему приведенное доказательство не работает в арифметике четных чисел?

1 Докажите, что для любого n, не делящегося на 2 и 3, число $n^2 - 25$ делится на 24.

2 Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 — остаток 2, ...,при делении на 10 — остаток 9.

3$^{\veebar}$ **Докажите что простых чисел бесконечно много.**

4$^{\veebar}$ Пусть числа m и n разложены в произведение простых сомножителей: $m = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3} \cdot \ldots$, $n = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdot 5^{d_3} \cdot \ldots$, где c_i и d_i — целые неотрицательные числа (возможно, равные нулю). Найдите разложения наибольшего общего делителя (m, n) и наименьшего общего кратного $[m, n]$ чисел m, n.

5 Пусть $n = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k}$, где p_i — простые, d_i — натуральные. Найдите

a) количество; b*) сумму

положительных делителей числа n.

6 В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел в ее концах. Сумма этих произведений равна 77. Найдите сумму чисел в вершинах.

---

7 Может ли число, имеющее ровно 15 делителей, делиться а) на 100; б) на 1000?

8 Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 станет квадратом, при умножении на 3 — кубом, а при умножении на 5 — пятой степенью?

9$^{\veebar}$ При каких k число $(k-1)!$ делится на k?

10 Докажите, что уравнение $x^2 = ny^2$ не имеет натуральных решений, если n — не квадрат натурального числа.