

Алгоритм Евклида

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

Общим делителем чисел a и b называется целое число, на которое делятся оба эти числа. **Наибольший из всех общих делителей** чисел a и b называется **наибольшим общим делителем (НОД)** чисел a и b (предполагается, что числа a и b не равны нулю одновременно). Обозначение: (a, b) .

1^v Докажите, что $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$, где r — остаток от деления a на b .

2 Найдите все возможные значения

a $(n, 12)$; **b** $(n, n + 1)$; **c** $(n, n + 6)$ **d** $(2n + 3, 7n + 6)$; **e** $(n^2, n + 1)$.

Алгоритм Евклида

Пусть у нас есть пара чисел $(a; b) > 0$ и мы хотим найти их НОД. Это делается с помощью алгоритма Евклида. На каждом шаге алгоритма мы заменяем пару $(x; y)$ (где $x > y$) на пару $(y; r)$, где r это остаток от деления x на y (то есть $x = qy + r$, $r < y$). Алгоритм Евклида заканчивается, когда мы получаем пару $(n; 0)$. Число n и будет НОД чисел a и b .

Если записать это все формулами, получится:

$$\begin{array}{lll}
 a = bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b, & \text{(делим } a \text{ на } b \text{ с остатком)} \\
 b = r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, & \text{(делим } b \text{ на } r_1 \text{ с остатком)} \\
 r_1 = r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, & \text{(делим } r_1 \text{ на } r_2 \text{ с остатком)} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 r_{k-1} = r_kq_{k+1} + r_{k+1}, & 0 < r_{k+1} < r_k, & \text{(делим } r_{k-1} \text{ на } r_k \text{ с остатком)} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, & \text{(делим } r_{n-2} \text{ на } r_{n-1} \text{ с остатком)} \\
 r_{n-1} = r_nq_{n+1}, & 0 < & \text{(} r_{n-1} \text{ разделилось нацело на } r_n \text{)}
 \end{array}$$

Тогда НОДом чисел a и b в этом случае будет число r_n .

3 Докажите что результат работы алгоритма Евклида — натуральное число.

4 Почему алгоритм Евклида закончит работу?

5^v Пусть a и b делятся на x . Докажите, что и результат будет делиться на x .

6 Объясните, почему $r_n = (a, b)$.

7 Найдите с помощью алгоритма Евклида **a** $(525, 231)$; **b** $(-91, -147)$;
c $(\underbrace{11\dots 111}_m, \underbrace{11\dots 111}_n)$; **d** (F_{100}, F_{101}) , где F_i — числа Фибоначчи.

8 Найдите: **a** $(2^{32} + 1, 2^{16} + 1)$; **b^v** $(2^{91} - 1, 2^{63} - 1)$; **c** $(n^a - 1, n^b - 1)$.

Обратный алгоритм Евклида

Из алгоритма Евклида следует, что $d = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$, но $r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1}r_{n-2}$, а r_{n-2} выражается через r_{n-3} и r_{n-4} и так далее. Значит существуют целые числа x и y такие, что $d = xa + yb$.

9^v Найдите x и y такие, что $(525, 231) = x \cdot 525 + y \cdot 231$

10 Кузнечик умеет прыгать вдоль прямой на 6 см и 10 см. Сможет ли он попасть в точку отстоящую от исходной на

a 7 см? А на 14 см?

b Опишите все точки, в которые он попасть сможет.

11 **a** Докажите, что (a, b) — наименьшее положительное число, которое можно представить в виде $ax + by$.

b Даны числа a и b , докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение относительно переменных x и y тогда и только тогда, когда $c \div (a, b)$.

12 **a** В ведро налили 12 литров молока. Пользуясь лишь сосудами в 5 и 7 литров, разделите молоко на две равные части.

b[★] Решите общую задачу: при каких a и b можно разделить пополам $a + b$ литров молока, пользуясь лишь сосудами в a литров, b литров и $a + b$ литров? За одно переливание из одного сосуда в другой можно вылить всё, что там есть, или долить второй сосуд до верха.

13[★] Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n , разделённая бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Для каждого n выясните, кто из играющих может всегда выигрывать, как бы не играл противник?

14[★] В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее 1543 раза. Сколько раз будет написано число 1543?