Сравнения по модулю

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

Ой, только посмотри на это! Нет, не на это это, а вон на то это!

Модуль любопытства. Portal

Определение. *Назовем числа a и b* **сравнимыми по модулю** *m, если остатки от деления a и b на m равны. Записывают: $a \equiv b \pmod{m}$.*

1 Докажите, что числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда $(a-b) \vdots m$.

$$(a \equiv b) \Leftrightarrow ((a-b) \vdots m)$$

2 Докажите свойства сравнимости по модулю:

a $a \equiv a \pmod{m}$ (рефлексивность);

b Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$ (симметричность);

c Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$ (транзитивность);

d Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;

e Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

3$^{\veebar}$ Заполните таблицы сложения и умножения по модулю 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	
1					
2					1
3					
4					

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0		
1	0	1	2		
2					3
3					
4					

4$^{\veebar}$ Даны два натуральных числа $a < b$. Докажите, что из любых b последовательных натуральных чисел можно выбрать два числа, произведение которых делится на ab.

---

5 Докажите (например, с помощью индукции), что если $a \equiv b \pmod{n}$, то

a $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ для любого натурального k;

b для любого многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами верно, что $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$.

6 Верно ли, что если $a \equiv b \pmod{n}$ и $a, b \geq 0$, то $c^a \equiv c^b \pmod{n} | \forall c$?

7 Пусть $k \neq 0$. Докажите, что

a $a \equiv b \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $ka \equiv kb \pmod{kn}$;

b если $ka \equiv kb \pmod{n}$ и числа k и n взаимно просты, то $a \equiv b \pmod{n}$ (лемма Евклида для сравнений).

---

8 Может ли квадрат целого числа иметь вид:

a $5q+2$

b $3q-1$

c $6q-1$

d $8q+3$

9 Существует ли натуральное число N такое, что N^3+3 делится на 99?

10$^{\vee}$ Докажите, что $a^2+b^2 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 0 \pmod 3$ при любых целых a и b.

11 Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа? А трех нечетных чисел?

---

12 Пусть $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ — десятичная запись числа x. Докажите признаки делимости:

a $x \equiv a_0 + \ldots + a_n \pmod 3$, b $x \equiv a_0 + \ldots + a_n \pmod 9$; c $x \equiv a_0 \pmod 2$, d $x \equiv a_0 \pmod 5$; e $x \equiv a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

13 Решите сравнения:

a $3x \equiv 1 \pmod 7$; b $6x \equiv 5 \pmod 9$; c $4x \equiv 2 \pmod{10}$;

14 Докажите, что для любого нечетного $n > 1$ верно, что $1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n \equiv 0 \pmod n$.

15$^{\bigstar}$ Может ли сумма чисел от одного до n заканчиваться на 7?

16$^{\bigstar}$ Докажите, что не существует целых x и y, являющихся решениями уравнений

a $x^2 - 5y + 3 = 0$;

b $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$.