

Делимость и остатки

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

— Кукушка, кукушка, сколько мне жить осталось ?

— Остаток вашего жизненного счета составляет 15 лет и 3 месяца.

Определение. Целое число a делится на целое число b , если существует такое целое число c , что $a = bc$. Записывают: $a : b$.

1^v Докажите, что

a если $a : b$ и $b : c$, то $a : c$ (транзитивность).

b $a : b$ и $b : a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$.

2 Докажите, или опровергните для любых a, x, y . Усиьте неверные утверждения, чтобы они стали верными.

a $y : a$ следует $xy : a$;

b из $x : a$ и $y : a$ следует $(x + y) : a$;

c если $a \neq 0$, то $x : y$ равносильно $ax : ay$.

Деление целых чисел выполнимо не всегда. Разделить число a на число $b \neq 0$ с остатком — значит представить число a в виде

$$a = bq + r, \quad \text{где } 0 \leq r < |b|.$$

*Число q при этом называется **неполным частным**, а число r — **остатком от деления a на b** .*

3 Пусть $|a| = 17$, а $|b| = 5$. Найдите чему может быть равен остаток от деления a на b .

4 Число a дает при делении на b остаток r . Какой остаток при делении на b даст число $-a$?

5^v Докажите, что для произвольных чисел a и b ($b > 0$) существуют и единственны числа r и q такие, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < b$.

6 Делитель и делимое увеличили в 3 раза. Как изменятся частное и остаток?

7 Число a кратно 3. Может ли остаток от деления числа a на 12 быть равным 2?

8 Число a при делении на 7 дает остаток 2. Какой остаток получится при делении на 7 числа:

- a** $8a + 1$; **b** $a^2 + a + 1$?

9 **a** Делится ли число $33^{77} + 77^{33}$ на 5?

b Какой цифрой оканчивается число 9999^{999999} ?

10 Какие остатки могут получиться при делении квадрата целого числа:

- a** на 3; **b** на 4?

11★ **a** Найдите наименьшее число (отличное от единицы), которое дает остаток 1 при делении на 2, на 3, на 5 и на 7.

b Найдите все такие числа.

12★ Может ли остаток от деления простого числа на 30 быть составным?

13★ Сколько чисел из множества $\{1; 11; \dots; \underbrace{11\dots 11}_{2021}\}$ делится на 7?