

# Перестановки и инверсии. (Призовой листок)

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

**1** Три кузнечика прыгают по прямой. Каждую секунду один из них перепрыгивает через ближайшего перед ним. Пронумеруем кузнечиков по порядку: 1, 2, 3. Могут ли они через минуту оказаться в таком порядке: 2, 1, 3?

Пусть в ряд написано несколько чисел. Будем говорить, что пара чисел образует *инверсию*, если большее из их стоит в ряду левее.

**2** Сколько инверсий образуют числа: 5, 2, 7, 1, 3?

*Чётностью* расстановки называется чётность числа её инверсий.

**3** Определите чётность расстановки  $n, n - 1, \dots, 2, 1$ .

**4** Докажите, что если в некоторой расстановке поменять два числа местами, то её чётность изменится.

**5** В городе разрешены только тройные обмены квартир (т.е.  $A$  переезжает в квартиру  $B$ ,  $B$  — в квартиру  $C$ ,  $C$  — в квартиру  $A$ ). Смогут ли два человека поменяться квартирами?

**6** Числа 1, 2, 3, ..., 250 записаны по порядку. Разрешается выбрать любые четыре числа и расставить их на тех же местах, но в обратном порядке. Можно ли с помощью таких операций прийти к расположению 250, 249, ..., 3, 2, 1?

**7** Ксюша придумала, как поменять в слове РАВНОВЕСИЕ буквы местами так, чтобы получилось другое, осмысленное (и характеризующее Ксюшин характер) слово. Знаток инверсий Кирилл утверждает, что это невозможно сделать операциями "разрешается прыгать буквой через две соседние вправо или влево (например, из РАВ сделать ВРА)". Прав ли Кирилл?

**8** 123 машины стартовали из разных точек трассы и целый день ездили по кругу. Вечером каждая машина оказалась на том же месте, откуда и стартовала. Докажите, что было совершено чётное число обгонов.

**9** Двоечник Сева написал на карточках числа от 1 до  $n$  и разложил карточки в некотором порядке. Он может менять местами две самые левые карточки, а также переставлять самую правую карточку в левый конец. Всегда ли у него получится выложить карточки в порядке возрастания?

**10** Игра "15". Дан квадрат, в котором находятся 15 фишек с числами, расположенные так, как показано на рисунке слева. Каждый раз можно в свободную ячейку перемещать одну из соседних фишек. Можно ли в итоге получить расположение фишек, показанное на рисунке справа?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

**11** Дано  $n$  магнитофонных лент, намотанных красными концами наружу, а зелёными внутрь. При каких  $n$  их можно перемотать, пользуясь одной пустой катушкой, так чтобы они оказались на своих прежних местах, но зелёными концами наружу?

**12** Лиля разложила в ряд несколько карточек с числами от 1 до  $n$ . Саша берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было левее неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь ровно столько же карточек оказалось правее неё. Далее он по очереди продельывает такую же операцию с карточками 2, 3, ...,  $n$ . Докажите, что после того. Как Саша совершит все  $n$  действий, количество инверсий окажется таким же, как было вначале.