Индукция.

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

> Решать задачу «вскипятить чайник» физик и математик будут одинаково: нальют воду, включат плиту, поставят на неё чайник и доведут его содержимое до 100 $°C$.
> А вот задачу «вскипятить наполненный водой чайник» решат по-разному.
> Физик подумает: «Включим плиту, поставим, нагреем».
> Математик: «Выльем воду из чайника, чем сведём задачу к предыдущей».

Принцип математической индукции. Пусть имеется последовательность утверждений A_1, A_2, A_3,… Если выполняются условия

1. A_1 верно,
2. из верности утверждения A_k следует верность утверждения A_{k+1},

то все утверждения верны.

1 a Докажите, что (при любом $n \geqslant 1$) верно равенство: $1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b Докажите, что (при любом $n \geqslant 1$) верно равенство: $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c Докажите, что (при любом $n \geqslant 1$) верно равенство:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\dots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$

2 Найти следующие суммы: a $1+3+5+\ldots+(2n-1)$; b $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2$; c★ $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$.

3 Доказать, что любую денежную сумму больше 7 рублей можно разменять купюрами достоинством в 3 и 5 рублей.

4 Доказать, что $(1+a)^n \geqslant 1+na$ при $a>1$.

5 Доказать, что a $2^n > n$; b $2^n > n^2$ при $n > 4$; c$^{\veebar}$ $n! > 2^n$ при $n > 3$;
d★ найдется такое k, что $2^n > n^{2000}$ при $n > k$.

6 Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Докажем, что в любом стаде коров все коровы одного цвета. Предположим, что есть стадо коров, в котором есть пара коров разного цвета. Рассмотрим такое стадо наименьшего возможного размера. Пусть в нём m коров. Заметим, что $m \geqslant 2$ (в неодноцветном стаде есть хотя бы 2 коровы). Выберем двух каких-то различных коров a и b. Остаток стада обозначим буквой X. Заметим, что корова a вместе с коровами X — это стадо из $(m-1)$ коровы. Поэтому оно одноцветное. Аналогично, стадо из b и X одноцветное. Рассмотрим любую корову из X. Она одного цвета с a и b. Значит, a и b одного цвета, а значит, всё стадо из m коров одноцветное, что противоречит предположению.

7 Найдите ошибку в следующем рассуждении:

В стране несколько городов соединенных дорогами так, что из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажем, что из любого города можно проехать в любой другой.

База. Если городов 2, то по условию они должны быть связаны между собой.

Шаг индукции. Пусть для n городов все доказано. Добавим $n+1$-й город. По условию из этого города ведет дорога в один из старых n городов. Следовательно, до него можно доехать в один из старых городов, а оттуда уже добраться до любого другого.

8$^{\veebar}$ Рассмотрим обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем. Докажите что для любого $n > 2$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей такого вида.

9 На сколько частей делят плоскость k прямых в общем положении? (Прямые находятся в общем положении, если любые две из них имеют ровно одну общую точку и никакие три прямые не проходят через одну точку.)

10 Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (возможно включая и нулевую).

---

11 В трех бочках содержится в сумме 128 литров воды, причем в каждой целое число литров. Разрешается выбрать две бочки и перелить из одной в другую столько воды, сколько там уже есть. Докажите, что можно собрать всю воду в одной бочке, сделав не более 7 переливаний (бочки достаточно большие).

12★ На сколько частей делят пространство k плоскостей в общем положении? (Плоскости находятся в общем положении, если никакие две из них не параллельны, любые три из них имеют ровно одну общую точку и никакие четыре не проходят через одну точку.)

13 На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из этих машин может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

14★ Доказать, что все последовательности длины n, состоящие из нулей и единиц, можно занумеровать так, что соседние последовательности отличаются ровно одной цифрой.

15★ Доказать, что $n^{n+1} > (n+1)^n$ при $n > 2$.