

# Бином Ньютона и треугольник Паскаля

8 "В" класс

**1** Меню в школьном буфете постоянно состоит из  $n$  различных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (это означает, что Петя может съесть за один раз от 0 до  $n$  различных блюд; ни в какие два дня его завтрак не должен состоять из одних одних и тех же блюд).

**a** Сколько дней ему удастся это делать?

**b** Сколько блюд он за это время съест?

**2** Вася, приятель Пети, решил последовать примеру своего друга, но съедать каждый день нечетное число блюд.

**a** Сколько дней ему удастся это сделать?

**b** Сколько блюд он за это время съест?

**3<sup>v</sup>**

**a** Раскройте скобки и приведите подобные члены в выражениях

$$(a + b)^2, (a + b)^3, (a + b)^4.$$

**b** Докажите формулу (она называется бином Ньютона):

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

**4** Куб размером  $10 \times 10 \times 10$  разбит плоскостями, параллельными граням, на 1000 кубиков размером  $1 \times 1 \times 1$ . Из любого кубика можно перейти в соседний с ним кубик, если тот находится выше, либо правее, либо дальше (мы поставили куб одной из граней к себе "лицом").

**a** Найдите количество способов пройти из кубика, расположенного в нижнем левом ближнем углу в дальний правый верхний угловой кубик.

**b** Найдите формулу для  $(a + b + c)^n$ .

---

**5** Множество содержит  $n$  элементов. Докажите что число способов выбрать из этого множества четное количество элементов равно числу способов выбрать из того же множества нечетное количество элементов. Придумайте три способа доказательства: через построение биекции, через бином Ньютона, через треугольник Паскаля.

**6** Найдите значение

$$C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \dots + 2^n \cdot C_n^n.$$

**7** Множество содержит  $n$  элементов. Сколькими способами можно из него выбрать:

а) подмножества  $A$  и  $B$  такие, что  $A \subset B$ ;

б) непересекающиеся подмножества  $A$  и  $B$  (порядок не важен)?

8 Пусть  $p$  — простое число.

а) Докажите, что  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ .

б) Докажите по индукции, что для всякого натурального  $n$  докажете, что  $n^p \equiv n \pmod{p}$  (это новое доказательство МТФ).

---

Лучи, параллельные правой стороне треугольника Паскаля, назовем **правыми диагоналями**, а лучи параллельные левой стороне — **левыми диагоналями**.

9<sup>v</sup> а) Докажите, что каждое число  $C$  в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей левой диагонали, начиная с самого правого вплоть до стоящего слева над числом  $C$ .

б) Докажите тождество:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \cdots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}.$$

в) Сформулируйте и докажете аналогичное утверждение о правой диагонали.

10 Выведите из пункта а) предыдущей задачи формулы для следующих сумм:

а)  $1 + 2 + \cdots + m$ ;

б)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + m \cdot (m + 1)$ ;

в)  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + m \cdot (m + 1) \cdot (m + 2)$ .

---

11 В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

12 а) В каких строках треугольника Паскаля все числа кроме крайних единиц делятся на  $p$ , где  $p$  — простое? б) А если  $p$  будет составным?

13<sup>★</sup> а) Патриций решил устроить праздник и для этого приготовил 240 бочек вина. Однако к нему пробрался недоброжелатель, который подсыпал яд в одну из бочек. Недоброжелателя тут же поймали, дальнейшая его судьба неизвестна. Про яд известно, что человек, его выпивший, умирает в течение (не через!) 24 часов. До праздника осталось два дня, то есть 48 часов. У патриция есть пять рабов, которыми он готов пожертвовать, чтобы узнать в какой именно бочке яд. Как патрицию вычислить отравленную бочку?

б) Из скольких бочек можно найти отравленную, если дней  $k$ , а рабов  $n$ ?