

Комбинаторика. Повторение

8 "В" класс

1^v В кухне n лампочек.

а) Сколько существует способов освещения?

б) Сколько существует способов освещения, при которых горят k ламп?

2) Найдите число различных перестановок букв способов в слове
МАТЕМАТИКА

3) В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

4★ На окружности поставили n точек и все точки попарно соединили хордами. Оказалось, что никакие три хорды не пересеклись в одной точке. Сколько точек пересечения хорд получилось?

Выборка шаров из урны называется выборкой с возвращением, если шар, вынутый из урны, возвращается обратно и может быть выбран еще раз, без возвращения, — если шар можно выбрать лишь один раз. Выборка называется неупорядоченной, если порядок в котором шары доставались из урны несущественен ($(5447) = (4457)$).

5^v Рассмотрим урну, содержащую n различных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны k шаров, если

а) выборка упорядоченная с возвращениями;

б) выборка упорядоченная без возвращений;

с) выборка неупорядоченная с возвращениями;

д) выборка неупорядоченная без возвращений?

6) а) Объясните, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ двумя способами: с помощью формулы и путем установления взаимно-однозначного соответствия.

б) Объясните, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$ двумя способами: с помощью формулы и путем установления взаимно-однозначного соответствия.

7 **a** Пусть p — простое. Докажите, что C_p^k либо равно 1, либо делится на p .

b Пусть m — степень двойки. Докажите, что C_m^k либо равно 1, либо чётно.

8 **a** Сколькими способами можно покрасить ряд из p сидений в a цветов?

b Пусть теперь мы красим круглую карусель состоящую из p сидений (p — простое). Сколькими способами можно раскрасить такую карусель?

c Какую теорему мы только что доказали?

9★ Обозначим через D_n количество перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, при которых ни одно число не стоит на своем месте. Докажите равенства

a $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2});$

b $D_n + C_n^1 D_{n-1} + C_n^2 D_{n-2} + \dots + C_n^n D_0 = n!.$

c Найдите D_n для $n = 1, \dots, 8$.