Теорема Кантора-Бернштейна.

8 ”В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что: $\boxed{\text{a}}$ любые два квадрата на плоскости равномощны; $\boxed{\text{b}}$ прямоугольник и квадрат на плоскости равномощны; $\boxed{\text{c}}$ любые два треугольника на плоскости равномощны.

$\boxed{\text{d}}$ Коля доказывает пункт а) этой задачи: "Разобьём оба квадрата на отрезки. И там и там их будет бесконечно много. Любые два отрезка равномощны. Построем биекцию: первый отрезок первого квадрата равномощен первому отрезку второго, второй отрезок первого равномощен второму отрезку второго. И так далее. Таким образом, любые два квадрата равномощны друг другу". Объясните, в чём Коля не прав.

$\boxed{\mathbf{2}^{\veebar}}$ $\boxed{\text{a}}$ Давайте считать, что мы живём в двоичной системе (то есть, есть только цифры 0 и 1). Докажите, что $0.1 = 0.0(1)$

$\boxed{\text{b}}$ Найдите мощность множества пар таких «совпадающих» десятичных дробей на отрезке $[0, 1]$.

$\boxed{\mathbf{3}^{\veebar}}$ Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно отрезку $[0, 1]$.

Указание. Воспользуйтесь конструкцией “деления отрезка пополам”. Каждое число $x \in [0, 1]$ запишите в виде бесконечной двоичной дроби следующим образом: первый знак этой дроби равен 0 или 1 в зависимости от того, попадает ли число x в левую или правую половину отрезка. Чтобы определить следующий знак, надо выбранную половину поделить снова пополам и посмотреть, куда попадет x, и т. д. В этой конструкции есть один существенный недостаток: некоторые числа имеют два представления, например, число $0,011(0)$ — то же самое, что и $0,010(1)$. Попытайтесь самостоятельно эту проблему разрешить.

$\boxed{\mathbf{4}^{\star}}$ Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству пар таких последовательностей.

Указание. Разбейте последовательность на подпоследовательность элементов с чётными номерами и подпоследовательность элементов с нечётными номерами.

5 Докажите, что отрезок $[0,1]$ равномощен квадрату $[0,1]^2$.

<u>Указание</u>. *Воспользуйтесь двумя предыдущими задачами.*

---

6 На плоскости нарисованы квадрат и круг. a Раскрасьте каждую из этих фигур в два цвета, черный и белый, так, чтобы черная часть круга была подобна черной части квадрата, а белая часть круга была подобна белой части квадрата. b Используя раскраску из предыдущего пункта, постройте биекцию между точками круга и квадрата.

7★ Докажите теорему **Кантора-Бернштейна**: если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$.

8 Не строя явную биекцию докажите: a Что отрезок и интервал равномощны. b Что квадрат и треугольник равномощны. c Что куб и шар равномощны.

9 Докажите, что "бублик" и шар в пространстве равномощны.

---

10 Докажите, что все геометрические фигуры (связные множества точек) на плоскости, содержащие отрезок, равномощны.

<u>Указание</u>. *В каждой фигуре попробуйте выделить два прямоугольника – один содержащий фигуру целиком, а другой - целиком содержащийся в фигуре*

11★ Докажите, что если квадрат разбит на два множества, то хотя бы одно из них равномощно квадрату.

12 Докажите, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.

13★ Пусть X — множество взаимно-однозначных отображений одного счетного множества в другое. a Докажите, что X несчетно. b Найдите $|X|$.

14★ Докажите, что различных кардинальных чисел бесконечно много. То есть, существует такая бесконечная последовательность множеств, что каждое следующее мощностно строго больше предыдущего.