Равномощность

8 ”В” класс

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Докажите, что равномощность — отношение эквивалентности. (Соответствующие классы эквивалентности называются *мощностями*.)

$\boxed{\mathbf{2}}$ Докажите, что всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что следующие множества счетны: $\boxed{\text{a}}$ множество натуральных чисел, больших 1; $\boxed{\text{b}}$ множество целых чисел; $\boxed{\text{c}}$ объединение конечного числа счетных множеств; $\boxed{\text{d}}$ объединение счетного числа конечных множеств; $\boxed{\text{e}}$ объединение счетного числа счетных множеств.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что следующие множества счетны: $\boxed{\text{a}}$ множество упорядоченных пар натуральных чисел; $\boxed{\text{b}}$ множество рациональных чисел; $\boxed{\text{c}}$ множество конечных последовательностей нулей и единиц; $\boxed{\text{d}}$ множество всех русских “слов”.

$\boxed{\mathbf{5}^{\veebar}}$ Докажите, что следующие множества равномощны: $\boxed{\text{a}}$ любые два отрезка; $\boxed{\text{b}}$ интервал и полуокружность без концов; $\boxed{\text{c}}$ интервал и прямая.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что: $\boxed{\text{a}}$ всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество; $\boxed{\text{b}}$ если A — бесконечное множество, то $|A \cup \{a\}| = |A|$; $\boxed{\text{c}}$ если A — бесконечное множество, а B конечно или счетно, то $|A \cup B| = |A|$; $\boxed{\text{d}}$ если A несчетно, а B счетно, то $|A \backslash B| = |A|$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что: $\boxed{\text{a}}$ отрезок равномощен полуинтервалу (т.е. отрезку без одного из концов), построив явную биекцию (воспользуйтесь предыдущей задачей); $\boxed{\text{b}}$ отрезок равномощен интервалу; $\boxed{\text{c}}$ окружность равномощна отрезку.

$\boxed{\mathbf{8}^{\star}}$ Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно. (Это утверждение называется **диагональ Кантора**.)

$\boxed{\mathbf{9}}$ Найдите: $\boxed{\text{a}}$ $|P(\{1, \ldots, n\})|$; $\boxed{\text{b}}$ $|P(N)|$, где $|N| = \aleph_0$.

$\boxed{\mathbf{10}^{\star}}$ Докажите, что $|P(A)| \neq |A|$ для любого множества A.

$\boxed{\mathbf{11}^{\veebar}}$ Докажите, что отношение “не больше”, рефлексивно и транзитивно.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Пусть $|A| \leqslant |B|$. Верно ли, что существует сюръективное отображение из B в A?

$\boxed{\mathbf{13}}$ Пусть A конечное множество, а B — бесконечное. Докажите, что $|A| < \aleph_0 \leqslant |B|$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Существует ли такое α, что $2^{\alpha} = \aleph_0$?