Биекции и обратные функции.

8 "В" класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Верно ли, что

$\boxed{\text{a}}$ композиция $f \circ g$ инъекции f и инъекции g всегда является инъекцией?

$\boxed{\text{b}}$ композиция $f \circ g$ сюръекции f и сюръекции g всегда является сюръекцией?

$\boxed{\text{c}}$ композиция $f \circ g$ сюръекции f и инъекции g всегда является сюръекцией?

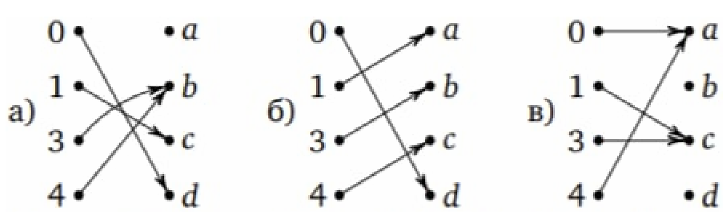
$\boxed{\text{d}}$ композиция $f \circ g$ инъекции f и сюръекции g всегда является инъекцией?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Чего больше: инъективных отображений 10-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 10-элементное?

$\boxed{\mathbf{3}^{\vee}}$ Докажите, что $f : X \to Y$ является биекцией, тогда и только тогда, когда f является сюръекцией и инъекцией.

Определение. Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Если $f(x) = y$, то y называется *образом элемента* x, а x — *прообразом элемента* y. Множество, состоящее из всех элементов x таких, что $f(x) = y$, называется *полным прообразом элемента* y при отображении f (обозначение: $f^{-1}(y)\big)$. *Образом множества* $A \subset X$ *при отображении* f называется множество, состоящее из всех элементов вида $f(x)$, где $x \in A$ (обозначение: $f(A)$). *Прообразом множества* $B \subset Y$ называется множество, состоящее из всех x таких, что $f(x) \in B$ (обозначение: $f^{-1}(B)$).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Для отображения $f : \{0, 1, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ (см. рис.) найти $f(\{0, 3\})$, $f(\{1, 3, 4\})$, $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(\{a, b\})$, $f^{-1}(\{b, d\})$.



$\boxed{\mathbf{5}}$ Пусть $f : X \to Y, A_1, A_2 \subset X, B_1, B_2 \subset Y$. Верно ли, что

$\boxed{\text{a}}$ $f(X) = Y$;

$\boxed{\text{b}}$ $f^{-1}(Y) = X$;

$\boxed{\text{c}}$ $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

$\boxed{\text{d}}$ $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

$\boxed{\text{e}}$ $f^{-1}(B_1 \backslash B_2) = f^{-1}(B_1) \backslash f^{-1}(B_2)$;

$\boxed{\text{f}}$ если $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$;

$\boxed{\text{g}}$ если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$?

$\boxed{\mathbf{6}}$ В каких пунктах из 4 задачи, существует обратное отображение?

$\boxed{\mathbf{7}^{\vee}}$ Докажите, что f — биекция, тогда и только тогда, когда f обратимо, то есть существует такое отображение $g: Y \to X$, что $g \circ f = Id_X$, $f \circ g = Id_Y$, где $Id_M : M \to M$, $Id_M(m) = m$ — тождественное отображение. Такое g называется обратным отображением.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$ таковы, что $g \circ f = Id_X$.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что f инъективно, а g сюръективно.

$\boxed{\text{b}}$ Верно ли, что f и g — биекции?

$\boxed{\mathbf{9}}$ Между какими из следующих множеств существуют биекции:

- множество натуральных чисел;
- множество целых неотрицательных чисел;
- множество четных натуральных чисел;
- множество нечетных натуральных чисел;
- множество квадратов нечетных чисел;
- множество простых чисел?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Установите биекции между следующими множествами:

$\boxed{\text{a}}$ множество подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, содержащих 1, и множество подмножеств, не содержащих 1;

$\boxed{\text{b}}$ множество подмножеств множества X и множество отображений из X в $\{0, 1\}$;

$\boxed{\text{c}}$ множество подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, состоящих из четного числа элементов, и множество подмножеств, состоящих из нечетного числа элементов;

$\boxed{\text{d}}$ отрезок AB и отрезок CD;

$\boxed{\text{e}}$ множество точек полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ и множество точек прямой $y = 1$;

$\boxed{\text{f}}$ множество точек интервала $(0, 1]$ и множество точек луча $[1, +\infty)$?