Отношения и отображения.

8 ”В” класс

Определение. Для любого множества M можно задать функцию

$$f(a,b) \to \{false, true\} | a, b \in M$$

(по-простому, f — это некоторый вопрос про два элемента множества, ответ на который — это или да или нет). Такая функция называется *отношением на множестве* M.

Отношение называется *отношением эквивалентности*, если

1. $f(a,a) = true$;
2. $f(a,b) = true \;\Rightarrow\; f(b,a) = true$;
3. $f(a,b) = f(b,c) = true \;\Rightarrow\; f(a,c) = true$;

где a, b, c — любые элементы M.

Если f это отношение эквивалентности, то для каждого элемента m его классом эквивалентности называется множество элементов, которому он эквивалентен (то есть, тех, для которых $f(m,a) = true$). Утверждается, что при выполнении трёх условий выше, любые два класса эквивалентности или не пересекаются или полностью совпадают.

$\boxed{\mathbf{0}}$ Для отношения «a и b дают одинаковый остаток при делении на 3» на множестве целых чисел проверьте что это отношение эквивалентности, и укажите разбиение всех чисел на классы эквивалентности.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Проверьте, являются ли отношения ниже отношениями эквивалентности и если да, то укажите разбиение на классы эквивалентности.

$\boxed{\text{a}}$ «площади квадратов a и b равны» на множестве квадратов на плоскости;

$\boxed{\text{b}}$ «прямая a перпендикулярна прямой b» на множестве прямых на плоскости.

$\boxed{\text{c}}$ «сторона и прилежащие углы треугольника a равны стороне и прилежащим углам треугольника b» на множестве треугольников на плоскости;

$\boxed{\text{d}}$ «две стороны треугольника a равны двум сторонам треугольника b» на множестве треугольников на плоскости.

$\boxed{\mathbf{2}^{\veebar}}$ Докажите, что любые два класса эквивалентности или не пересекаются или полностью совпадают

$\boxed{\mathbf{3}}$ Пусть множество M разбито на попарно непересекающиеся подмножества. Докажите, что отношение «принадлежать одному подмножеству» является отношением эквивалентности.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Нарисуйте все отображения множества $\{0, 1, 2\}$ в множество $\{0, 1\}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пусть $|X| = k$, $|Y| = l$. Сколько существует отображений $X \to Y$?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Может ли при отображении $f : X \to Y$ найтись

$\boxed{\text{a}}$ элемент множества X, не имеющий образа;

$\boxed{\text{b}}$ элемент множества X, имеющий несколько образов;

$\boxed{\text{c}}$ элемент множества Y, не имеющий прообраза;

$\boxed{\text{d}}$ элемент множества Y, имеющий несколько прообразов?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Сколько среди отображений из 4 задачи инъективных, сюръективных, биективных?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Найдите при каких k и l существуют

$\boxed{\text{a}}$ биективные $\boxed{\text{b}}$ инъективные $\boxed{\text{c}}$ сюръективные

отображения $X \to Y$?

$\boxed{\mathbf{9^\star}}$ Найдите сколько существует отображений в каждом пункте задачи 8?

$\boxed{\mathbf{10}^{\veebar}}$ Пусть даны три отображения:

$f : \{1, 2, 3, 5\} \to \{0, 1, 2\}$, где $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 0$, $5 \mapsto 2$;

$g : \{0, 1, 2\} \to \{3, 7, 37, 137\}$, где $0 \mapsto 3$, $1 \mapsto 137$, $2 \mapsto 7$;

$h : \{3, 7, 37, 137\} \to \{1, 2, 3, 5\}$, где $3 \mapsto 1$, $7 \mapsto 3$, $37 \mapsto 3$, $137 \mapsto 2$.

Нарисуйте картинки для следующих отображений: f, g, h, $g \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h \circ g$, $g \circ h \circ f$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \in X$, $B_1, B_2 \in Y$. Какие из следующих утверждений верны? Докажите или опровергните. Исправьте неверные утверждения.

$\boxed{\text{a}}$ $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;

$\boxed{\text{b}}$ $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

$\boxed{\text{c}}$ $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;

$\boxed{\mathbf{12^\star}}$ Пусть f всюду определена, а g не всюду определена (то есть, про некоторые элементы мы говорим, что значения функции от них не существует). Верно ли, что композиция $g \circ f$ не всюду определена?