

Множества. Формула включений и исключений.

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

1 Сколько чисел от 1 до 1000 делится на 2 или на 3?

2^v Сколько существует целых чисел от 1 до 16 500, которые

a не делятся на 5;

b не делятся ни на 3, ни на 5;

c не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11;

d не делятся ни на 3 ни на 5, но делятся на 11.

Определение 1. Для любого конечного множества A обозначим как $|A|$ число элементов в нём. Также число $|A|$ называется мощностью множества A .

3 Пусть A, B, C – конечные множества. Докажите, что:

a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

b $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

4 В школе работают драмкружок, кружок по фото и кружок по рисованию. На каждый из них ходит по 20 школьников, причем 10 школьников ходит на какие-то два кружка, а Лида на все три. Сколько всего школьников ходит на кружки?

5^v В комнате площадью 6 м^2 постелили три ковра произвольной формы площадью 3 м^2 каждый. Докажите, что какие-то два из них пересекаются по площади, хотя бы 1 м^2 .

6 Объединение четырех множеств, каждое из которых состоит из 40 элементов, содержит не более 100 элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух из этих множеств состоит, по крайней мере, из 10 элементов.

7 На контрольной дали четыре задачи. Один школьник умеет решать их все. Каждую тройку задач умеют решать два школьника. Каждую пару задач — 6 школьников. Каждую задачу в отдельности умеют решать 15. Какое наименьшее количество школьников могло писать контрольную?

8[★] Выведите аналогичную задаче 3 формулу для объединения n множеств (она называется **формулой включений и исключений**).

9 Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов и во сколько раз?

10 В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак "+". Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем перед каждой пятой, а затем перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

11 Известно, что $|A| = 58$. Каких подмножеств больше у множества A : 15-элементных или 43-элементных?

12^v Пусть U — непустое конечное множество. Каких подмножеств у U больше: с четным или нечетным числом элементов?

13★ В графе 100 вершин, нет треугольников, степень каждой вершины больше 40. Доказать, что в этом графе нет циклов длины 5.