

# Множества. Формула включений и исключений.

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

1 Сколько чисел от 1 до 1000 делится на 2 или на 3?

2<sup>v</sup> Сколько существует целых чисел от 1 до 16 500, которые

a не делятся на 5;

b не делятся ни на 3, ни на 5;

c не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11;

d не делятся ни на 3 ни на 5, но делятся на 11.

**Определение 1.** Для любого конечного множества  $A$  обозначим как  $|A|$  число элементов в нём. Также число  $|A|$  называется мощностью множества  $A$ .

3 Пусть  $A, B, C$  – конечные множества. Докажите, что:

a  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ;

b  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ .

4 В школе работают драмкружок, кружок по фото и кружок по рисованию. На каждый из них ходит по 20 школьников, причем 10 школьников ходит на какие-то два кружка, а Лида на все три. Сколько всего школьников ходит на кружки?

5<sup>v</sup> В комнате площадью  $6 \text{ м}^2$  постелили три ковра произвольной формы площадью  $3 \text{ м}^2$  каждый. Докажите, что какие-то два из них пересекаются по площади, хотя бы  $1 \text{ м}^2$ .

6 Объединение четырех множеств, каждое из которых состоит из 40 элементов, содержит не более 100 элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух из этих множеств состоит, по крайней мере, из 10 элементов.

7 На контрольной дали четыре задачи. Один школьник умеет решать их все. Каждую тройку задач умеют решать два школьника. Каждую пару задач — 6 школьников. Каждую задачу в отдельности умеют решать 15. Какое наименьшее количество школьников могло писать контрольную?

8★ Выведите аналогичную задаче 3 формулу для объединения  $n$  множеств (она называется **формулой включений и исключений**).

**9** Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов и во сколько раз?

**10** В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак "+". Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем перед каждой пятой, а затем перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

**11** Известно, что  $|A| = 58$ . Каких подмножеств больше у множества  $A$ : 15-элементных или 43-элементных?

**12<sup>v</sup>** Пусть  $U$  — непустое конечное множество. Каких подмножеств у  $U$  больше: с четным или нечетным числом элементов?

**13★** В графе 100 вершин, нет треугольников, степень каждой вершины больше 40. Доказать, что в этом графе нет циклов длины 5.