Теория множеств 1.

Спецкурс 8 класс. Гимназия 1543.

Встречаются как-то физик и математик. Физик и спрашивает:
— Слушай, почему у поезда колеса круглые, а когда он едет они стучат.
— Это элементарно. Формула круга — пи эр квадрат, так вот этот квадрат как раз и стучит.

Элемент x принадлежит множеству A записывают как $x \in A$.

1 Сколько элементов в множестве

a $\{1\}$, $\{1,2,3\}$, $\{\text{Вася}\}$, $\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$;

b букв слова "математика";

c имен учеников нашего класса?

Определение 1. Множества A и B называются равными (обозначение: $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Определение 2. Множество A называется подмножеством множества B (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент, принадлежащий множеству A, принадлежит и множеству B.

2$^{\veebar}$ Докажите, что для любых множеств A, B, C

a $A \subset A$; b если $A \subset B$, и $B \subset C$, то $A \subset C$;

c Докажите, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 3. Множество называется пустым (обозначение: $\emptyset$), если оно не содержит ни одного элемента.

3 a Доказать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

b Доказать, что пустое множество единственно.

---

4 Сколько a элементов; b подмножеств у каждого из следующих множеств: $\{0\}$, $\emptyset$, $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{\emptyset\}$, $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},3\}$?

5$^{\veebar}$ Существует ли множество, у которого ровно a 0; b 5; c 16 подмножеств?

6* Может ли у множества A быть ровно на 2000 подмножеств больше, чем у множества B?

7* Может ли у множества A быть ровно 2000 подмножеств, не являющихся ни подмножествами множества B, ни подмножествами множества C?

Определение 4. *Объединением* множеств A и B (обозначение $A \cup B$) называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ или $x \in B$.

Определение 5. *Пересечением* множеств A и B (обозначение $A \cap B$) называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ и $x \in B$.

8 Пусть $A = \{1, 3, 7, 137\}$, $B = \{3, 7, 100\}$, $C = \{0, 1, 3, 100\}$, $D = \{0, 7, 100, 333\}$. Найдите

a $A \cup B$; $A \cap B$; b $(A \cap B) \cup D$; $C \cap (D \cap B)$;

c $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; $(A \cup (B \cap C)) \cap D$;

d $(C \cap A) \cup ((A \cup (C \cap D)) \cap B)$.

9 Докажите, что для любых множеств A, B, C

a $A \cup A = A$, $A \cap A = A$; b $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

c $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

d$^{\underline{\vee}}$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Определение 6. *Разность* множеств A и B (обозначение: $A \backslash B$) называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ и $x \notin B$.

10 Для множеств A, B, C, D из задачи 7 найти следующие множества:

a $(A \cup B) \backslash (C \cap D)$; b $A \backslash (B \backslash (C \backslash D))$;

c $D \backslash ((B \cup A) \backslash C)$ d $((A \backslash (B \cup D)) \backslash C) \cup B$.

11 Верно ли, что для любых множеств A, B, C

a $(A \backslash B) \cup B = A$;

b $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;

c $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

d $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$;

e $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$;

f $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \cup B$?

12* Сколько разных множеств можно получить из множеств A, B, C, D задачи 7 с помощью операций a $\cup$, $\cap$, $\backslash$; b $\cup$, $\cap$; c $\cup$, $\backslash$; d $\cap$, $\backslash$?
