

7 класс
13 октября 2022
Защикливание-2

Определение. Если в последовательности, начиная с какого-то момента, начинают повторяться одни и те же элементы, то говорится, что эта последовательность *защикливается* (или что она *периодическая*). Повторяющиеся элементы образуют *период*. Перед всеми периодами может идти *предпериод*.

$$\underbrace{2, 0, 22, 1, 1, 1}_{\text{предпериод}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \dots$$

1 Анна Алексеевна приклеила на двери всех кабинетов школы записки с надписями: «Занятие математиками в кабинете №...» (в разных записках номера кабинетов могут быть разными, а могут и повторяться), а потом исчезла в неизвестном направлении. Маша пытается попасть на спецкурс, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что в какой-то момент она начнет ходить по циклу.

Теорема (о защикливании). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от предыдущего (или некоторого фиксированного числа предыдущих), она с некоторого момента защиклится.*

2 Однажды в честь Дня Гимназии в 1543 решили устроить квест. На двери каждого кабинета повесили записку: «Если ты пришел к этому кабинету из старого корпуса, то иди в кабинет №... А если из нового, то иди в кабинет №...». Правда ли, что все участники этого квеста рано или поздно начнут ходить по циклу?

3 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно защиклится.

4 а Арина упражняется в счете, выписывая очень длинную последовательность цифр. Первые две цифры ей написала Анна Алексеевна, а каждая следующая цифра в последовательности равна последней цифре суммы двух предыдущих (например, после . . . , 7, 9 она пишет 6 — последнюю цифру $7 + 9 = 16$). Докажите, что эта последовательность рано или поздно защиклится.

б Теперь Арина выписывает последние цифры *произведения* двух предыдущих цифр. Докажите, что у этой последовательности длина цикла будет не больше 16.

5 Анна Алексеевна приклеила на двери всех кабинетов школы записки с надписями: «Занятие матвертикали в кабинете №...» (в разных записках номера кабинетов могут быть разными, а могут и повторяться), а потом исчезла в неизвестном направлении. Соня внимательно изучила записки и обнаружила, что все они указывают на разные кабинеты. Маша пытается попасть на спецкурс, руководствуясь этими указаниями. Начала она у кабинета №18. Докажите, что рано или поздно она вернется к 18 кабинету.

Теорема (о зацикливании назад). *Если система зацикливается, и ее предыдущее состояние можно однозначно восстановить по последующему (фиксированному числу последующих), то она зацикливается без предпериода.*

6 (Игра в перестройку) Несколько человек встают в ряд у доски. На доске пишется правило, по которому надо перестраиваться. (Например, $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 2 \dots$) Люди перестраиваются по этому правилу. Потом опять перестраиваются по этому правилу, и так далее. Оказывается, в какой-то момент они обязательно встанут в исходном порядке. Почему?

7 Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в исходное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

8 Докажите, что герой задачи №3 обязательно вернется на площадь, с которой он начал свой путь.

9 На доске выписывают последовательность 5, 8, 2, 3, 8, 1, 4, 6, Каждая следующая цифра в ней равна последней цифре суммы четырех предыдущих.

a Правда ли, что в какой-то момент в этой последовательности второй раз встретится 5, 8, 2, 3?

b Встретится ли в этой последовательности 8, 5, 8, 2?

10 a Правда ли, что если у чисел a и b три последние цифры совпадают, то и у чисел $7a$ и $7b$ три последние цифры совпадают?

b Правда ли, что если у чисел $7a$ и $7b$ три последние цифры совпадают, то и у чисел a и b три последние цифры совпадают?

c Докажите, что для какого-то натурального N число 7^N заканчивается на 007 (нет, $N = 1$ не годится).