

7 класс
6 октября 2022
Защикливание

0 а) Найдите последнюю цифру 1543^{2022} .

б) На доске написана длинная последовательность чисел. Она начинается с 1, 1, а каждое следующее число получается по такому правилу: два предыдущих числа перемножаются, к произведению добавляется 1, и берется остаток от деления результата на 4. Найдите 2022-е число в этой последовательности.

Определение. Если в последовательности, начиная с какого-то момента, начинают повторяться одни и те же элементы, то говорится, что эта последовательность *защикливается* (или что она *периодическая*). Повторяющиеся элементы образуют *период*. Перед всеми периодами может идти *предпериод*.

$$\underbrace{2, 0, 22, 1, 1, 1}_{\text{предпериод}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \dots$$

1) Какие из этих последовательностей защикливаются? У тех, которые защикливаются, выделите период и предпериод.

- а) 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...
- б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...
- в) 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, ...
- г) 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...
- д) 8, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, ...

2) Найдите последнюю цифру а) 99^{111} б) $23^{64} + 64^{23}$.

3) На экране компьютера горит число. Каждую минуту компьютер высчитывает разность между 11 и этим числом, умноженным на 2, (из большего вычитается меньшее) и выводит эту разность на экран вместо предыдущего числа. (Например, после 43 он выведет $43 \cdot 2 - 11 = 75$, а после 4 выведет $11 - 2 \cdot 4 = 3$.) Вначале на экране компьютера было число 10. Какое число там будет через 1543 минуты?

4) Максим и Артем написали по периодической последовательности с предпериодом. Потом они эти последовательности сложили друг с другом. Могло ли так получиться, что у получившейся последовательности предпериода нет?

5) Придумайте последовательность, состоящую только из 1 и 2, которая не защикливается.

6) а) Анна Алексеевна приклеила на двери всех кабинетов школы записки с надписями: «Занятие матвертикали в кабинете №...» (в разных записках номера кабинетов могут быть разными, а могут и повторяться), а потом исчезла в неизвестном направлении. Маша пытается попасть на спецкурс, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что в какой-то момент она начнет ходить по циклу.

б) На следующий день на всех дверях было написано «Занятие матвертикали в кабинете №... или в кабинете №18» (первое число в разных надписях может быть разным, а может и повторяться). Правда ли, что если Маша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно она начнет ходить по циклу?

□ В межгалактической школе бесконечное число кабинетов, пронумерованных натуральными числами. На двери каждого кабинета записка «Занятие матвертикали в кабинете №...» Правда ли, что если М'аша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно она начнет ходить по циклу?

□ Однажды в честь Дня Гимназии в 1543 решили устроить квест. На двери каждого кабинета повесили записку: «Если ты пришел к этому кабинету из старого корпуса, то иди в кабинет №... А если из нового, то иди в кабинет №...». Правда ли, что все участники этого квеста рано или поздно начнут ходить по циклу?

Теорема (о зацикливании). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от предыдущего, она с некоторого момента зациклится.*

□ В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.

(Сначала сформулируйте, что такое «состояние системы» в этой задаче.)

□ Арина упражняется в счете, выписывая очень длинную последовательность цифр. Первые две цифры ей написала Анна Алексеевна, а каждая следующая цифра в последовательности равна последней цифре суммы двух предыдущих (например, после . . . , 7, 9 она пишет 6 — последнюю цифру $7 + 9 = 16$). Докажите, что эта последовательность рано или поздно зациклится.

Теорема (о зацикливании+). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от фиксированного числа предыдущих, она с некоторого момента зациклится.*

□ Теперь Арина из предыдущей задачи выписывает последовательность, где каждая следующая цифра равна последней цифре произведения двух предыдущих. Так же, как и в предыдущей задаче, эта последовательность зациклится.

Докажите, что длина цикла □ не больше 25; □ не больше 16.