

## 7 класс

29 сентября 2022

### Признаки делимости

Числа  $a$  и  $b$  дают одинаковый остаток при делении на  $m$  тогда и только тогда, когда  $(a - b) : m$ .

Трёхзначное число, составленное из цифр  $a, b, c$  мы будем обозначать через  $\overline{abc}$  (аналогично четырёхзначное число будем обозначать через  $\overline{abcd}$  и так далее).

Поскольку мы работаем в десятичной системе счисления, то

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d.$$

- При делении на 2, на 5 или на 10 число  $N$  дает тот же остаток, что и его последняя цифра.
- При делении на 4 или на 25 число  $N$  дает тот же остаток, что и число, составленное из двух его последних цифр (то есть для числа  $\overline{abcde}$  это будет  $\overline{de}$ ).
- При делении на 3 или на 9 число  $N$  дает тот же остаток, что сумма его цифр (то есть для числа  $\overline{abcde}$  это будет  $a + b + c + d + e$ ).
- При делении на 11 число  $\overline{abcd}$  дает тот же остаток, что и  $-a + b - c + d$ , а число  $\overline{abcde}$  дает тот же остаток, что и  $a - b + c - d + e$ .

Иными словами, плюсы-минусы перед цифрами чередуются, и перед **последней цифрой** всегда стоит плюс.

**1** Найдите остатки при делении на 4, 9, 11 у следующих чисел:

- a** 1000;    **b** 1543;    **c** 2022;  
**d** 123456789;    **e** 7823412093;    **f**  $10^{1543}$ .

**2** Какими цифрами можно заменить значки, чтобы

- a** число  $71\heartsuit 1\diamondsuit$  делилось на 45?  
**b** число  $34\spadesuit 5\clubsuit$  делилось на 36?

Найдите все варианты ответа.

**3** **a** Число дает остаток 71 при делении на 90. Какой остаток оно дает при делении на 10? А на 9?

**b** Число  $666 \star 15432022 \star$  дает остаток 71 при делении на 90. Какие цифры мы заменили звездочками?

**4** Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите что его предпоследняя цифра нечётна.

**5** Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

**6** Докажите, что число  $\overline{abc}$  дает тот же остаток от деления на 7, что и  $2a + 3b + c$ .

**7** Докажите, что число  $\overline{a00b}$  дает тот же остаток от деления на 13, что и  $b - a$ .

**8** Докажите, что ребус  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ef fe}$  не имеет решений.

**9** Докажите что число, записываемое с помощью 100 единиц и 100 двоек не может быть полным квадратом.

**10** Найдите остаток от деления 1543202266642 на 99. Пожалуйста, не надо делить в столбик!

Подсказка: найдите сначала остатки от деления на 9 и 11.

**11** Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?