

7 класс
29 сентября 2022
Признаки делимости

Числа a и b дают одинаковый остаток при делении на m тогда и только тогда, когда $(a - b) : m$.

Трёхзначное число, составленное из цифр a, b, c мы будем обозначать через \overline{abc} (аналогично четырёхзначное число будем обозначать через \overline{abcd} и так далее).

Поскольку мы работаем в десятичной системе счисления, то

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d.$$

- При делении на 2, на 5 или на 10 число N дает тот же остаток, что и его последняя цифра.
- При делении на 4 или на 25 число N дает тот же остаток, что и число, составленное из двух его последних цифр (то есть для числа \overline{abcde} это будет \overline{de}).
- При делении на 3 или на 9 число N дает тот же остаток, что сумма его цифр (то есть для числа \overline{abcde} это будет $a + b + c + d + e$).
- При делении на 11 число \overline{abcd} дает тот же остаток, что и $-a + b - c + d$, а число \overline{abcde} дает тот же остаток, что и $a - b + c - d + e$.

Иными словами, плюсы-минусы перед цифрами чередуются, и перед **последней цифрой** всегда стоит плюс.

1 Найдите остатки при делении на 4, 9, 11 у следующих чисел:

- a** 1000; **b** 1543; **c** 2022;
d 123456789; **e** 7823412093; **f** 10^{1543} .

2 Какими цифрами можно заменить значки, чтобы

- a** число $71\heartsuit 1\diamondsuit$ делилось на 45?
b число $34\spadesuit 5\clubsuit$ делилось на 36?

Найдите все варианты ответа.

3 **a** Число дает остаток 71 при делении на 90. Какой остаток оно дает при делении на 10? А на 9?

b Число $666 \star 15432022 \star$ дает остаток 71 при делении на 90. Какие цифры мы заменили звездочками?

4 Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите что его предпоследняя цифра нечётна.

5 Докажите, что если записать в обратном порядке цифры любого натурального числа, то разность исходного и нового числа будет делиться на 9.

6 Докажите, что число \overline{abc} дает тот же остаток от деления на 7, что и $2a + 3b + c$.

7 Докажите, что число $\overline{a00b}$ дает тот же остаток от деления на 13, что и $b - a$.

8 Докажите, что ребус $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ef fe}$ не имеет решений.

9 Докажите что число, записываемое с помощью 100 единиц и 100 двоек не может быть полным квадратом.

10 Найдите остаток от деления 1543202266642 на 99. Пожалуйста, не надо делить в столбик!

Подсказка: найдите сначала остатки от деления на 9 и 11.

11 Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?