7 класс

9 марта 2023

Алгоритм Евклида

В этом листочке вместо НОД(a, b) мы будем писать просто (a, b).

Лемма. $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$, где $r \equiv a \pmod{b}$ (например, r может быть остатком от деления a на b).

Алгоритм Евклида. Пусть $a \geq b$, и нам нужно найти (a, b). Заменим a на остаток от деления a на b. НОД от этого не изменится. Продолжим так делить большее с остатком на меньшее и заменять большее число на получившийся остаток. Когда одно из чисел уменьшится до нуля, другое станет равно (a, b).

1 При помощи алгоритма Евклида найдите a $(720, 378)$; b $(525, 231)$.

2 Какие значения может принимать a $(n, n+6)$; b $(2n+3, 7n+6)$?

3 Существует ли натуральное n, при котором дробь $\dfrac{42n+3}{30n+2}$ сократима?

4 Найдите a $(2^{32}+1, 2^{16}+1)$; b $(\underbrace{11\ldots11}_{\text{100 единиц}}, \underbrace{11\ldots11}_{\text{60 единиц}})$;

c $(2^{91}-1, 2^{63}-1)$; d $(F_{101}; F_{100})$, где F_i — числа Фибоначчи.

Метод математической индукции

Часто бывает, что в задаче требуется доказать серию практически одинаковых утверждений, отличающихся только числами в них.

Принцип математической индукции: если верно первое утверждение, и из n-го утверждения можно вывести $(n+1)$-е, то все утверждения в этой серии верны.

Решение задачи «по индукции» состоит из нескольких шагов:

• Явно сформулировать серию утверждений, которые мы будем доказывать. (Обычно она выглядит как одно утверждение, в котором есть переменная n.)

• Доказать первое утверждение или несколько (**база индукции**).

• Предположить, что n-е утверждение верно (**предположение индукции**).

• Доказать, что в этом случае и $(n+1)$-е утверждение тоже верно (**индукционный переход**).

По принципу математической индукции получится, что все утверждения серии верны.

$\boxed{5}$ На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в n томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Докажите, что он сможет расставить тома в правильном порядке не более чем за $n-1$ такую операцию.

$\boxed{6}$ **Ханойская башня.** Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно переносить со стержня на стержень по следующим правилам:

• кольца можно переносить только по одному;

• нельзя откладывать кольца в сторону;

• нельзя класть большее кольцо на меньшее.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что можно переместить всю пирамидку с одного стержня на другой.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что это можно сделать за 2^n-1 ход. Можно ли обойтись меньшим числом ходов?

$\boxed{7}$ $\boxed{\text{a}}$ Трехклеточный уголок увеличили в 2^n раз. Докажите, что получившуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

$\boxed{\text{b}}$ Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

Переходить к $(n+1)$-му утверждению можно от любого утверждения с меньшим номером, не обязательно от n-го. Но нужно внимательно думать, сколько именно утверждений мы берем в базу.

$\boxed{8}$ Для каждого натурального числа от $n+1$ до $2n$ включительно выберем наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Чему будет равна полученная сумма?