

# 7 класс

9 февраля 2022

## Сравнения и остатки

В этом листочке все числа целые.

Числа  $a$  и  $b$  называются **сравнимыми по модулю  $m$** , если они дают одинаковые остатки от деления на  $m$ . Пишут  $a \equiv b \pmod{m}$ .

**Теорема** (критерий сравнимости). Числа  $a$  и  $b$  сравнимы по модулю  $m$  тогда и только тогда, когда  $(a - b) : m$ .

**Теорема** (свойства сравнений).

- а Если  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $b \equiv c \pmod{m}$ , то  $a \equiv c \pmod{m}$ .
- б Если  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $c \equiv d \pmod{m}$ , то  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ .
- в Если  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $c \equiv d \pmod{m}$ , то  $ac \equiv bd \pmod{m}$ .

**Следствие.** При сложении, вычитании и умножении чисел их остатки от деления на  $m$  тоже складываются, вычитаются и умножаются.

Если нас интересует не точный результат вычислений, а только остаток, то при выполнении действий можно сколько угодно раз заменять числа равными им по модулю.

### Упражнения

**1** Заполните таблицы сложения и умножения остатков:

а по модулю 3:

+	0	1	2
0			
1			
2			

×	0	1	2
0			
1			
2			

б по модулю 4:

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

×	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

в по модулю 5:

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

**2** Не проводя сложных вычислений и не пользуясь калькулятором, найдите остатки от деления:

- а  $15 + 43 + 2023$  на 6;
- б  $20 \cdot 23 \cdot 1543$  на 6;
- в  $150001 \cdot 4300322 + 5700029$  на 8.

- 3**
- а На какие цифры может заканчиваться полный квадрат?
  - б Какие остатки могут давать полные квадраты по модулю 3?
  - в по модулю 4?       д по модулю 5?

## Задачи

1 [а] Докажите, что  $n^3 - n$  делится на 6.

[б] Арина сложила 2023 числа. Оказалось, что их сумма делится на 6. Вероника сложила кубы Ариных чисел. Докажите, что ее сумма тоже делится на 6.

*Для решения следующих задач нужно рассмотреть их по какому-то модулю. Вам поможет упражнение 3 с лицевой стороны листочка. Условие задачи подскажет вам, какой именно модуль нужно взять.*

2 Докажите, что если  $a^2 + b^2$  делится на 3, то  $a^2 + b^2$  делится на 9.

3 Целые числа  $a, b, c, d$  таковы, что  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$  делится на 5. Докажите, что  $abcd$  делится на 625.

4 Докажите, что уравнение  $4x^3 - y^2 = 1$  не имеет целых решений.

5 [а] Андрей сложил квадраты пяти последовательных натуральных чисел. Докажите, что получившаяся у него сумма делится на 5.

[б] Докажите, что у Андрея не мог получиться полный квадрат.

*А в следующих задачах угадать, какой именно модуль использовать, уже сложнее. Это могут быть модули 3, 4, 5, 10 из упражнения 3, а могут быть и другие небольшие числа.*

6 Может ли число 1000...001 быть полным квадратом?

7 Незнайка придумал два натуральных числа, возвёл каждое из них в квадрат и результаты сложил. Получилось 15431543. Докажите, что Незнайка где-то ошибся.

8 Из предыдущей задачи мы узнали, что число 15431543 нельзя представить в виде суммы двух квадратов. А в виде суммы трех можно?

**Замечание:** Знаменитая теорема Лагранжа утверждает, что любое натуральное число можно представить в виде суммы *четырёх* квадратов (некоторые из них могут быть нулями). Можете на досуге проверить это утверждение для каких-нибудь небольших чисел.

9 Трудолюбивая Юля выписала все простые числа, которые больше 3 и меньше 2023. Не менее трудолюбивая Лиза вычислила значение  $p^2 - 1$  для каждого Юлиного числа  $p$ . Найдите НОД всех Лизиних чисел.