

**7 класс**  
**26 января 2022**  
*Деревья*

Связный граф без простых циклов называется **деревом**.

**Теорема.** Граф является деревом в том и только том случае, когда любые две его вершины соединены единственным простым путем.

**1** Нарисуйте все различные деревья с **a** 4; **b** 5; **c** 6 вершинами.

**2** Докажите, что если в дереве удалить любое ребро, то оно распадется ровно на две компоненты связности.

**3** В пруд пустили 300 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

**4** На столе лежит коробочка, внутри которой находятся 7 коробочек. В некоторых из них лежит по семь коробочек, в некоторых из них тоже лежит по семь коробочек, и так далее, а пустых коробочек получилось всего 49. Сколько всего коробочек?

Вершина степени 1 в дереве называется **листом** или **висячей вершиной**.

**Теорема.** Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть хотя бы два листа.

**Теорема (об остовном дереве).** В любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы получилось дерево.

**5** В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно закрыть на ремонт некоторую станцию и запретить проезд через неё так, что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую.

**Теорема.** В дереве с  $n$  вершинами ровно  $n - 1$  ребер.

**Теорема.** В связном графе с  $n$  вершинами не меньше  $n - 1$  ребер.

**6** В графе  $n$  вершин и  $k$  компонент связности. Докажите, что в нем не меньше  $n - k$  ребер.

**7** **a** В связном графе 12 вершин и 11 ребер. Обязательно ли этот граф — дерево?

**b** В связном графе 12 вершин и 12 ребер. Сколько в нем может быть циклов?

**8** В стране 1543 города, некоторые из них соединены железными дорогами. От любого города можно добраться на поезде до любого другого, сделав не больше одной пересадки. Какое минимальное число железных дорог может быть в этой стране?

**9** Из веревочек связали волейбольную сетку  $15 \times 43$ . Какое максимальное число разрезов можно сделать, чтобы сетка не распалась на куски?

**10** **a** На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в  $n$  клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

**b** Квадрат  $8 \times 8$  разрезали на 3 многоугольника одинакового периметра по линиям сетки. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра.

**7 класс**  
**26 января 2022**  
*Деревья*

Связный граф без простых циклов называется **деревом**.

**Теорема.** Граф является деревом в том и только том случае, когда любые две его вершины соединены единственным простым путем.

**1** Нарисуйте все различные деревья с  а) 4;  б) 5;  в) 6 вершинами.

**2** Докажите, что если в дереве удалить любое ребро, то оно распадется ровно на две компоненты связности.

**3** В пруд пустили 300 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

**4** На столе лежит коробочка, внутри которой находятся 7 коробочек. В некоторых из них лежит по семь коробочек, в некоторых из них тоже лежит по семь коробочек, и так далее, а пустых коробочек получилось всего 49. Сколько всего коробочек?

Вершина степени 1 в дереве называется **листом** или **висячей вершиной**.

**Теорема.** Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть хотя бы два листа.

**Теорема (об остовном дереве).** В любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы получилось дерево.

**5** В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно закрыть на ремонт некоторую станцию и запретить проезд через неё так, что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую.

**Теорема.** В дереве с  $n$  вершинами ровно  $n - 1$  ребер.

**Теорема.** В связном графе с  $n$  вершинами не меньше  $n - 1$  ребер.

**6** В графе  $n$  вершин и  $k$  компонент связности. Докажите, что в нем не меньше  $n - k$  ребер.

**7**  а) В связном графе 12 вершин и 11 ребер. Обязательно ли этот граф — дерево?

б) В связном графе 12 вершин и 12 ребер. Сколько в нем может быть циклов?

**8** В стране 1543 города, некоторые из них соединены железными дорогами. От любого города можно добраться на поезде до любого другого, сделав не больше одной пересадки. Какое минимальное число железных дорог может быть в этой стране?

**9** Из веревочек связали волейбольную сетку  $15 \times 43$ . Какое максимальное число разрезов можно сделать, чтобы сетка не распалась на куски?

**10**  а) На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в  $n$  клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

б) Квадрат  $8 \times 8$  разрезали на 3 многоугольника одинакового периметра по линиям сетки. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра.