

## 7 класс

12 января 2022

# Двудольные графы

**Двудольным** называется граф, вершины которого можно разбить на две группы (**доли**) так, что каждое ребро соединяет вершины из разных долей.

Во всех задачах этого листочка постарайтесь сначала сформулировать, что в них является графом, и почему он двудольный.

### Подсчет ребер двумя способами

**1** В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько там девочек, и сколько мальчиков, если всего учеников 24?

**2** В школьной столовой продается первое, второе и десерт. Обслуживая учеников 7М класса, повар заметил, что каждый из них взял либо 1, либо все 3 блюда, а каждое блюдо взяло нечётное число учеников. Докажите, что кто-то из 26 учеников 7М вообще не пообедал.

**3** Можно ли поставить на бесконечную клетчатую доску 25 коней так, чтобы каждый бил ровно 4 других?

### Раскраска

*Вершины двудольного графа можно покрасить в два цвета так, что концы каждого ребра будут разных цветов (такая раскраска называется **правильной**).*

**4** Вершины графа — шестизначные числа. Два числа связаны ребром, если у них на пяти позициях цифры совпадают, а на одной отличаются на 1. Двудольен ли этот граф?

**5** На плоскости нарисовано несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников, у каждого из которых есть горизонтальная сторона. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

**6** Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

### Обходы и чередования

**Путем** в графе называется последовательность вершин, каждая из которых соединена со следующей ребром.

**Цикл** — это замкнутый путь.

*В двудольном графе на любом пути вершины из одной доли и из другой чередуются.*

**7** У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

8 Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Юля прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Юля была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Юля на клетке 10?

9 На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 1543 прыжка?

10 На двух клетках шахматной доски стоят чёрная и белая фишки. За один ход можно передвинуть любую из них на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку (две фишки не могут стоять на одной клетке). Могут ли в результате таких ходов встретиться все возможные варианты расположения этих двух фишек, причём ровно по одному разу?

**Теорема** (критерий двудольного графа). Граф является двудольным в том и только том случае, когда в нем нет циклов нечетной длины.

*Слова «в том и только том случае» означают, что есть следствие в обе стороны. Если граф двудольный, то в нем нет нечетных циклов. И если в графе нет нечетных циклов, то он обязательно двудольный.*

11 В каждую вершину связного графа записали произвольное число, затем на каждом ребре записали сумму чисел в его концах, после чего стерли числа в вершинах. Обязательно ли можно восстановить числа в вершинах? Разберите случаи, когда граф является

- a циклом четной длины;
- b циклом нечетной длины;
- c произвольным двудольным;
- d произвольным не двудольным.