

Графы. Степени вершин и подсчет ребер.

Графом называется набор объектов (**вершин**), некоторые пары которых находятся в каком-то отношении (соединены **ребрами**).

1 Ювелиру заказали сделать из бриллиантов массами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 карат такое ожерелье, чтобы сумма масс никаких двух соседних бриллиантов не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7. Сколько у ювелира способов выполнить заказ?

Степенью вершины графа называется количество выходящих из нее ребер.

Лемма (о рукопожатиях). Сумма степеней всех вершин графа четна. Иными словами, в любом графе четное число вершин нечетной степени.

2 В 7М классе 13 мальчиков и 12 девочек. Анна Алексеевна связывает их веревками, чтобы они не разбежались (каждая веревка одним концом привязана к одному ученику, а другим — к другому). Сможет ли Анна Алексеевна сделать так, чтобы к каждому мальчику было привязано по 5 веревок, а к каждой девочке по 4?

3 Можно ли на клетчатой плоскости закрасить 17 клеток так, чтобы каждая закрашенная клетка соседствовала (по стороне) с 1 или 3 закрашенными?

4 Могут ли степени вершин в графе быть равны **a** 5, 3, 3, 2, 1;

b 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2; **c** 2, 2, 2, 4, 4, 4; **d** 8, 8, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 2?

5 В графе из каждой вершины выходит по 7 ребер. Может ли в нём быть 1543 вершины? А может ли быть 1543 ребра?

6 Можно ли нарисовать на плоскости 13 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Граф **связный**, если между любыми двумя его вершинами есть цепочка ребер.

Граф состоит из одной или нескольких **компонент связности**. Каждая компонента является связным графом, а между разными компонентами ребер нет.

7 В стране Цифра сто городов, называющихся 1, 2, 3, ..., 100. Два города соединены дорогой, если сумма всех цифр в их названиях делится на 3. Можно ли по этим дорогам доехать от города 15 до города 43?

8 В стране Оз 43 города, каждый из которых соединен авиалиниями не менее, чем с 21 другим. Докажите, что из любого города можно самолетом добраться до любого другого (возможно, с пересадками).

9 В связном графе степени всех вершин четны. Одно ребро стерли. Докажите, что граф остался связным.

10 На конгресс съехались физики и лирики. Каждый физик знаком с 5 физиками и 10 лириками, а каждый лирик — с 9 физиками и 6 лириками.

a Кого больше, физиков или лириков, и во сколько раз?

b Какое минимальное число ученых могло быть на этом конгрессе?

11 На шахматную доску 8×8 по одному выставляются короли: первый — на любую клетку, а каждый следующий должен побить нечетное число ранее выставленных королей. Можно ли заполнить все клетки доски?