

7 класс  
8 декабря 2022  
*Полуинварианты*

1 В наборе имеется несколько гирь, каждая не более 20 г. Докажите, что эти гири можно положить на две чашки весов так, чтобы одна чашка весов была легче другой не более чем на 20 г.

а В наборе имеется 100 гирь, каждые две из которых отличаются по массе не более чем на 20 г. Докажите, что эти гири можно положить на две чашки весов так, чтобы одна чашка весов была легче другой не более чем на 20 г.

2 Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встаёт и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

*Полуинвариантом* называется величина, которая в течение процесса меняется только в одну сторону.

3 На доске написаны неотрицательные числа  $a, b, c, d$ . Их стерли и вместо них написали  $a + b, b + c, c + d, d + a$ . Эту операцию повторили еще несколько раз и получили исходные числа. Найдите их.

4 К натуральному числу, написанному на доске, разрешается прибавлять одну треть или одну седьмую его текущего значения. Докажите, что число когда-нибудь перестанет быть натуральным.

5 а В клетках таблицы  $1543 \times 1543$  расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.

б В клетки таблицы  $m \times n$  вписаны числа. Разрешается менять знак у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца. Всегда ли можно таким образом добиться того, что суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, станут неотрицательными?

6 В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

7 В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.