

Счетчики движения к цели

Счетчиком называется величина, показывающая, насколько процесс близок к завершению (насколько мы близки к цели). С каждым шагом счетчик увеличивается (или уменьшается) минимум на 1.

0 На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?

1 На доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать?

2 На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Верхняя грань испачкана. Кубик прокатили по доске, перекатывая через рёбра, так, что он побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что испачканная грань ни разу не лежала на доске?

Подсказка: как переместить кубик на соседнюю клетку, оставив его испачканной гранью вверх?

3 Полную колоду (52 карты) выложили в ряд: часть карт рубашкой вверх, часть — рубашкой вниз. За один ход можно перевернуть три несоседние карты, если первая и третья находятся на одинаковом расстоянии от второй. Докажите, что такими операциями можно переложить все карты рубашкой вверх.

Подсказка: научитесь менять положение ровно одной карты.

4 В фирме работает 10 сотрудников с разными зарплатами. Каждый месяц владелец повышает зарплату на 1 рубль ровно девятерым (по своему выбору). Как директору повышать зарплаты, чтобы сделать их одинаковыми? (Зарплата — целое число рублей.)

5 **a** Каждая клетка доски 8×8 чёрная или белая. За ход можно перекрасить все клетки в одной строке или одном столбце в противоположные цвета. Всегда ли можно за несколько ходов сделать доску одноцветной?

b Каждая клетка доски 8×8 чёрная или белая. За ход можно любой прямоугольник из трёх клеток перекрасить в тот цвет, которого в нём больше. Всегда ли можно за несколько ходов сделать всю доску одноцветной.

6 Дана полоска 1×20 , в которой каждая клетка либо белая, либо черная. За одну операцию можно перекрасить клетки в любом прямоугольнике на противоположные. За какое наименьшее число операций можно наверняка сделать всю полоску белой?

7 **a** В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \dots, 16$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

b Докажите, что если числа стоят по убыванию, то меньше чем 120 ходами не обойтись.