

7М, спецкурс, листок 5

27 сентября 2022

Соответствия

0 **a** Выписали все натуральные числа от 1 до 999. Каких среди них больше: с суммой цифр 17 или с суммой цифр 10?

b Сколько нужно равносторонних треугольников со стороной 1, чтобы сложить из них ромб со стороной 1000?

Чего больше?

1 В одном доме живут 43 мальчика и одна девочка. Назовем «компанией» любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки? На сколько?

2 Три девочки решают листок по комбинаторике.

• Лиза считает, сколько у уравнения $x + y + z = 120$ есть решений, где x , y и z — четные натуральные числа.

• Юлия считает, сколько у уравнения $x + y + z = 117$ есть решений, где x , y и z — нечетные натуральные числа.

• Таня считает, сколько у уравнения $x + y + z = 57$ есть решений, где x , y и z — целые неотрицательные числа (то есть натуральные числа или нули).

a Докажите, что у Лизы и Юли получились одинаковые ответы.

b Докажите, что и у Тани получился такой же ответ.

3 В Тридевятом Царстве в ходу медные монеты достоинством в 1, 2, 5, 10, 15, 50 тугриков, а также золотые монеты достоинством в 100, 200, 500, 2500, 5000 тугриков. Что больше: число способов заплатить 200 тугриков медными монетами или число способов заплатить 20000 тугриков золотыми монетами?

4 **a** В 7М 27 человек. Олег пишет всевозможные списки из нескольких учеников класса (в списке может не быть ни одного человека или, наоборот, быть все 27 человек). Каких списков больше: с четным или с нечетным числом учеников?

b Та же задача, только учеников в классе 26.

Немного повторения

5 Число N разделили на 43 и получили в остатке 12. Потом число N разделили на 41 и получили то же самое неполное частное, но без остатка. Найдите число N .

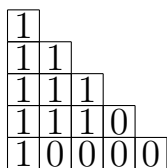
6 Какие цифры нужно вписать вместо значков, чтобы число $5\clubsuit 48\heartsuit 9$ делилось на 9 и давало остаток 1 при делении на 11?

Комбинаторика и соответствия

7 Сколькими способами в квадрате 2022×2022 можно выделить квадрат 1011×1011 по линиям сетки?

8 Сколько существует способов разбить число 2022 в сумму нескольких натуральных слагаемых, которые *приблизительно равны*? Числа называются *приблизительно равными*, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

9 В клетки «лесенки» высотой 15 вписывают нули и единицы. Если в какой-то клетке стоит единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху тоже должна стоять единица. Сколькими способами можно это сделать? (На картинке изображен один из способов так расставить нули и единицы в лесенке высотой 5.)



10 В n -угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. А сколько всего точек пересечения у этих диагоналей?

Задачи на шоколадку

5★ На числовой прямой в во всех точках с целыми номерами находятся лампочки. На каждой лампочке есть кнопка, при нажатии на которую лампочка меняет состояние: загорается или гаснет.

У вас есть шаблон — какой-то набор из нескольких целых чисел. Его можно перемещать вдоль числовой прямой как жесткую фигуру. Приложив шаблон в каком-то месте, можно одновременно нажать на кнопки у всех лампочек, закрытых шаблоном. Например, если у вас есть шаблон $\{1, 2, 4\}$, то можно нажать на кнопки у лампочек 7, 8, 10 или у лампочек $-3, -2, 0$.

a) Вначале горит только лампочка №0. Будем каждый раз прикладывать левую границу шаблона к самой левой горячей лампочке. Докажите, что в какой-то момент опять будет гореть только одна лампочка.

b) Вначале все лампочки выключены. Докажите, что можно за несколько прикладываний шаблона добиться того, что гореть будут ровно две лампочки.

На шоколадку нужно сдать оба пункта.