

7М, спецкурс, листок 4

20 сентября 2022

Защикливание

0 а Найдите последнюю цифру 1543^{2022} .

б На доске написана длинная последовательность чисел. Она начинается с 1, 1, а каждое следующее число получается по такому правилу: два предыдущих числа перемножаются, к произведению добавляется 1, и берется остаток от деления результата на 4. Найдите 2022-е число в этой последовательности.

Определение. Если в последовательности, начиная с какого-то момента, начинают повторяться одни и те же элементы, то говорится, что эта последовательность *защикливается* (или что она *периодическая*). Повторяющиеся элементы образуют *период*. Перед всеми периодами может идти *предпериод*.

$$\underbrace{2, 0, 22, 1, 1, 1}_{\text{предпериод}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \dots$$

1 Какие из этих последовательностей защикливаются? У тех, которые защикливаются, выделите период и предпериод.

а 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, ...

б 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

в 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, ...

г 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...

д 8, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, ...

2 Найдите последнюю цифру а 99^{111} б $23^{64} + 64^{23}$.

3 Придумайте последовательность, состоящую только из 1 и 2, которая не защикливается.

4 На экране компьютера горит число. Каждую минуту компьютер высчитывает разность между 11 и этим числом, умноженным на 2, (из большего вычитается меньшее) и выводит эту разность на экран вместо предыдущего числа. (Например, после 43 он выведет $43 \cdot 2 - 11 = 75$, а после 4 выведет $11 - 2 \cdot 4 = 3$.) Вначале на экране компьютера было число 10. Какое число там будет через 1543 минуты?

5 а Анна Алексеевна приклеила на двери всех кабинетов школы записки с надписями: «Спецкурс 7М в кабинете №...» (в разных записках номера кабинетов могут быть разными, а могут и повторяться), а потом исчезла в неизвестном направлении. Саша пытается попасть на спецкурс, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что в какой-то момент он начнет ходить по циклу.

б На следующий день на всех дверях было написано «Спецкурс 7М в кабинете №... или в кабинете №18» (первое число в разных надписях может быть разным, а может и повторяться). Правда ли, что если Саша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно он начнет ходить по циклу?

в В межгалактической школе бесконечное число кабинетов, пронумерованных натуральными числами. На двери каждого кабинета записка «Спецкурс 7∞ в кабинете №...» Правда ли, что если Саша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно он начнет ходить по циклу?

d Однажды в честь Дня Гимназии в 1543 решили устроить квест. На двери каждого кабинета повесили записку: «Если ты пришел к этому кабинету из старого корпуса, то иди в кабинет №... А если из нового, то иди в кабинет №...». Правда ли, что все участники этого квеста рано или поздно начнут ходить по циклу?

Теорема (о зацикливании). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от предыдущего, она с некоторого момента зациклится.*

6 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.

7 Арина упражняется в счете, выписывая очень длинную последовательность цифр. Первые две цифры ей написал Олег, а каждая следующая цифра в последовательности равна последней цифре суммы двух предыдущих (например, после . . . , 7, 9 она пишет 6 — последнюю цифру $7 + 9 = 16$). Докажите, что эта последовательность рано или поздно зациклится.

Теорема (о зацикливании+). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от фиксированного числа предыдущих, она с некоторого момента зациклится.*

8 Теперь Арина из предыдущей задачи выписывает последовательность, где каждая следующая цифра равна последней цифре произведения двух предыдущих. Так же, как и в предыдущей задаче, эта последовательность зациклится.

Докажите, что длина цикла **a** не больше 25; **b** не больше 16.

9 Бесконечная последовательность цифр строится по следующим правилам:

1) Первые 10 цифр могут быть какими угодно.

2) Каждая цифра, начиная с 11-ой, равна последней цифре суммы нескольких предыдущих цифр.

3) Число слагаемых равно предыдущей цифре, а если предыдущая цифра — 0, то берется 10 слагаемых.

Докажите, что эта последовательность зациклится. Оцените максимальную возможную длину этого цикла.

7М, спецкурс, листок 4

20 сентября 2022

Защикливание

0 а Найдите последнюю цифру 1543^{2022} .

б На доске написана длинная последовательность чисел. Она начинается с 1, 1, а каждое следующее число получается по такому правилу: два предыдущих числа перемножаются, к произведению добавляется 1, и берется остаток от деления результата на 4. Найдите 2022-е число в этой последовательности.

Определение. Если в последовательности, начиная с какого-то момента, начинают повторяться одни и те же элементы, то говорится, что эта последовательность *защикливается* (или что она *периодическая*). Повторяющиеся элементы образуют *период*. Перед всеми периодами может идти *предпериод*.

$$\underbrace{2, 0, 22, 1, 1, 1}_{\text{предпериод}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \underbrace{1, 5, 4, 3, 1, 0}_{\text{период}}, \dots$$

1 Какие из этих последовательностей защикливаются? У тех, которые защикливаются, выделите период и предпериод.

а 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, ...

б 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

в 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, ...

г 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...

д 8, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, 9, 7, 7, ...

2 Найдите последнюю цифру а 99^{111} б $23^{64} + 64^{23}$.

3 Придумайте последовательность, состоящую только из 1 и 2, которая не защикливается.

4 На экране компьютера горит число. Каждую минуту компьютер высчитывает разность между 11 и этим числом, умноженным на 2, (из большего вычитается меньшее) и выводит эту разность на экран вместо предыдущего числа. (Например, после 43 он выведет $43 \cdot 2 - 11 = 75$, а после 4 выведет $11 - 2 \cdot 4 = 3$.) Вначале на экране компьютера было число 10. Какое число там будет через 1543 минуты?

5 а Анна Алексеевна приклеила на двери всех кабинетов школы записки с надписями: «Спецкурс 7М в кабинете №...» (в разных записках номера кабинетов могут быть разными, а могут и повторяться), а потом исчезла в неизвестном направлении. Саша пытается попасть на спецкурс, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что в какой-то момент он начнет ходить по циклу.

б На следующий день на всех дверях было написано «Спецкурс 7М в кабинете №... или в кабинете №18» (первое число в разных надписях может быть разным, а может и повторяться). Правда ли, что если Саша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно он начнет ходить по циклу?

в В межгалактической школе бесконечное число кабинетов, пронумерованных натуральными числами. На двери каждого кабинета записка «Спецкурс 7∞ в кабинете №...» Правда ли, что если Саша будет руководствоваться этими указаниями, то рано или поздно он начнет ходить по циклу?

d Однажды в честь Дня Гимназии в 1543 решили устроить квест. На двери каждого кабинета повесили записку: «Если ты пришел к этому кабинету из старого корпуса, то иди в кабинет №... А если из нового, то иди в кабинет №...». Правда ли, что все участники этого квеста рано или поздно начнут ходить по циклу?

Теорема (о зацикливании). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от предыдущего, она с некоторого момента зациклится.*

6 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы, все в разные стороны. Участник соревнований по городскому ориентированию ходит по улицам, на каждой площади сворачивая по очереди то направо, то налево. Докажите, что его маршрут рано или поздно зациклится.

7 Арина упражняется в счете, выписывая очень длинную последовательность цифр. Первые две цифры ей написал Олег, а каждая следующая цифра в последовательности равна последней цифре суммы двух предыдущих (например, после . . . , 7, 9 она пишет 6 — последнюю цифру $7 + 9 = 16$). Докажите, что эта последовательность рано или поздно зациклится.

Теорема (о зацикливании+). *Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от фиксированного числа предыдущих, она с некоторого момента зациклится.*

8 Теперь Арина из предыдущей задачи выписывает последовательность, где каждая следующая цифра равна последней цифре произведения двух предыдущих. Так же, как и в предыдущей задаче, эта последовательность зациклится.

Докажите, что длина цикла **a** не больше 25; **b** не больше 16.

9 Бесконечная последовательность цифр строится по следующим правилам:

1) Первые 10 цифр могут быть какими угодно.

2) Каждая цифра, начиная с 11-ой, равна последней цифре суммы нескольких предыдущих цифр.

3) Число слагаемых равно предыдущей цифре, а если предыдущая цифра — 0, то берется 10 слагаемых.

Докажите, что эта последовательность зациклится. Оцените максимальную возможную длину этого цикла.