

Треугольник Паскаля и не только

- 1 На сколько нулей заканчивается $11^{100} - 1$?
- 2 Докажите, что a) $y = (1,1)^{1000} > 100$; b) $(1,1)^{1000} > 1\,000\,000\,000$.
- 3 При помощи треугольника Паскаля докажите соотношения:
 a) $1 \cdot C_n^1 - 2 \cdot C_n^2 + 3 \cdot C_n^3 - \dots \pm n \cdot C_n^n = 0$ (при $n \geq 2$);
 b) $1^2 \cdot C_n^1 - 2^2 \cdot C_n^2 + 3^2 \cdot C_n^3 + \dots \pm n^2 \cdot C_n^n = 0$ (при $n \geq 3$).

4 (**Треугольник Лейбница**) Здесь изображен фрагмент таблицы, которая называется треугольником Лейбница. Его свойства «противоположны» свойствам треугольника Паскаля. Числа на границе треугольника обратны последовательным натуральным числам. Каждое число внутри равно сумме двух чисел, стоящих под ним.

					$\frac{1}{1}$																
						$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$												
					$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3}$											
				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{4}$									
			$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{5}$								
		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{6}$							
	$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{105}$		$\frac{1}{140}$		$\frac{1}{105}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{7}$								

- a) Найдите формулу, которая связывает числа из треугольников Паскаля и Лейбница.
- b) Докажите равенства (слева стоит бесконечная сумма вдоль одной из диагоналей треугольника Лейбница):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots = \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \dots = \frac{1}{2}$$

- c) Вычислите бесконечную сумму

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \frac{1}{280} + \dots$$

и обобщите получившиеся результаты.