7М, спецкурс, листок 27

28 марта 2023

Комбинаторика раскрытия скобок

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок и приведения подобных в выражениях

$\boxed{\text{a}}$ $(a+b+c+d+e)(f+g+h)$;
$\boxed{\text{b}}$ $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)(1+f)(1+g)(1+h)$;
$\boxed{\text{c}}$ $(a+b)^{10}$?

$\boxed{\mathbf{2}}$ В выражении $(a+b+c)(a+b+d)(a+c+d)(b+c+d)$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найдите коэффициенты перед одночленами
$\boxed{\text{a}}$ a^3b; $\boxed{\text{b}}$ a^2b^2; $\boxed{\text{c}}$ a^2bc.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ Раскройте скобки в выражениях $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ и выпишите результаты друг под другом. На что это похоже?

$\boxed{\text{b}}$ В выражении $(a+b)^n$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что все получившиеся слагаемые будут иметь вид $C_n^k \cdot a^{n-k}b^k$.

Теорема (бином Ньютона)**.** При раскрытии скобок в выражении $(a+b)^n$ получается

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + C_{n-1}^nab^{n-1} + C_n^nb^n$$

Часто бывает полезна такая форма бинома:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^kx^k + \cdots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$$

Числа сочетаний C_n^k иногда называются **биномиальными коэффициентами**.

$\boxed{\mathbf{4}}$ В выражении $(2x+5y)^{11}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найдите коэффициент перед одночленом x^6y^5.

$\boxed{\mathbf{5}}$ В выражении $\left(3x - \dfrac{4}{x^3}\right)^{36}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найдите слагаемое, не содержащее переменную.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Выведите из бинома Ньютона уже известные вам формулы:

$\boxed{\text{a}}$ $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
$\boxed{\text{b}}$ $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^nC_n^n = 0$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Найдите $1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - 8C_n^3 + \cdots \pm 2^nC_n^n$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В выражении $(1-3x+2x^2)^{10}$ раскрыли скобки и привели подобные. Найдите коэффициент при x^4.

Подсказка: сначала разложите на множители.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Пусть p — простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

$\boxed{\mathbf{10^{\star}}}$ **Убывающей степенью** a называется $a^{\underline{n}} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)$ (всего n множителей). Докажите, что убывающие степени тоже удовлетворяют биному Ньютона:

$$(a+b)^{\underline{n}} = C_n^0 a^{\underline{n}} + C_n^1 a^{\underline{n-1}} b + C_n^2 a^{\underline{n-2}} b^{\underline{2}} + \cdots + C_n^k a^{\underline{n-k}} b^{\underline{k}} + \cdots + C_{n-1}^n a b^{\underline{n-1}} + C_n^n b^{\underline{n}}$$

<u>Подсказка:</u> попробуйте придумать комбинаторную интерпретацию для $a^{\underline{n}}$ и для бинома.