7М, спецкурс, листок 25

28 марта 2023

Треугольник Паскаля

Здесь изображены первые строчки *треугольника Паскаля*. В нем по краям стоят единицы, а каждое число в середине равно сумме двух чисел над ним. Строчки нумеруются, начиная с нуля, и числа в строке тоже нумеруются, начиная с нуля (т.е. второе число в четвертой строке треугольника Паскаля равняется 6).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Встретится ли где-то в треугольнике Паскаля число 1543?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля четное число нечетных чисел.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что на k-ом месте в n-ой строке треугольника Паскаля стоит число C_n^k.

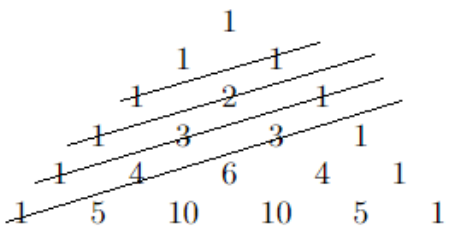
$\boxed{\mathbf{4}}$ Чему равна сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля? Найдите сумму $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Чему равна сумма чисел, стоящих в n-ой строке треугольника Паскаля на четных местах? А на нечетных? Найдите $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\boxed{\text{a}}$ Что получится, если сложить несколько первых чисел на какой-нибудь диагонали треугольника Паскаля? (Например, $1+3+6$ или $1+4+10+20$.)

$\boxed{\text{b}}$ Найдите сумму $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_{m+k}^k$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\boxed{\text{a}}$ Через единицы на левой стороне треугольника Паскаля проводятся линии под углом 30° вверх-вправо (как на рисунке). Что получится, если сложить числа на каждой линии?



$\boxed{\text{b}}$ Запишите получившееся соотношение формулой.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\boxed{\text{a}}$ Нарисуйте достаточно большой треугольник Паскаля, в котором нечетные числа будут изображены точками одного цвета, а четные — точками другого цвета. Какие закономерности вы видите? Объясните их.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что в строках с номерами 2^n все числа, кроме крайних единиц, четные. А в строках с номерами $2^n - 1$ все числа нечетные.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1