

21 марта 2023

Количество путей

1 **а** Фигура «улитка» может ходить на одну клетку вправо или на одну клетку вверх. Улитку поставили в левую нижнюю клетку доски 5×6 . Запишите в каждой клетке количество ведущих в нее путей улитки.

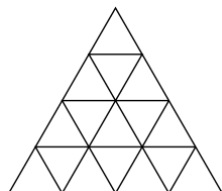
б Сделайте то же самое для фигуры «хромой король», которая может ходить на одну клетку вправо, одну клетку вверх или одну клетку по диагонали вправо-вверх.

2 Сколькими способами пешка, стоящая на клетке e1 пустой шахматной доски (в нижнем ряду посередине), может пройти в дамки? (Пешка ходит по диагонали вверх-влево или вверх-вправо и становится дамкой на верхней горизонтали доски.)

3 В треугольнике со стороной n можно ходить по линиям сетки вниз-влево, вниз-вправо и по горизонтали вправо. (На рисунке изображен треугольник для $n = 4$.)

а Докажите, что при любом n есть четное число путей из верхнего угла в правый нижний.

б Может ли это число равняться 1000000 при каком-нибудь n ?

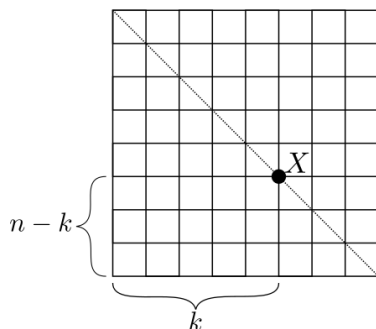


В задачах 4 и 5 ходить можно только вверх и вправо по линиям сетки.

4 **а** Докажите, что количество способов добраться от левого нижнего угла прямоугольника $k \times (n - k)$ до правого верхнего равняется C_n^k .

б Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

5 **а** На диагонали квадрата $n \times n$ отмечена точка $X(k, n - k)$. Найдите количество способов пройти из левого нижнего угла в правый верхний, зайдя по дороге в точку X .



б Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

6 **а** На клетчатой доске 21×21 хромой король прошел из левого нижнего угла в правый верхний. Горизонтальных, вертикальных и диагональных ходов было поровну. Найдите число возможных маршрутов короля.

б То же, но король не может делать два хода подряд по диагонали.