

7М, спецкурс, листок $24\frac{1}{2}$

17 марта 2023

Индукция. Доказывай больше.

Не получается шаг индукции? При этом связь между ступеньками есть, но её немного не хватает для доказательства? Расширьте ступеньку: поменяйте утверждение индукции.

1 Докажите, что $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} < \frac{1}{2}$.

2 Дан равносторонний треугольник со сторонами длины 1. За один ход можно увеличить одну из сторон треугольника, но так, чтобы он остался треугольником. Докажите, что после n ходов наибольшая сторона будет не больше $(n+2)$ -го числа Фибоначчи F_{n+2} .

3 Назовем натуральное число равным, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое $n-1$ -значное число можно представить как сумму не более чем n равных чисел.

4 Каждая клетка клетчатой доски $n \times n$ раскрашена в белый или черный цвет. Оказалось, что каждая клетка граничит по стороне ровно с двумя клетками противоположного цвета. Докажите, что раскраска симметрична относительно диагонали.

7М, спецкурс, листок $24\frac{1}{2}$

17 марта 2023

Индукция. Доказывай больше.

Не получается шаг индукции? При этом связь между ступеньками есть, но её немного не хватает для доказательства? Расширьте ступеньку: поменяйте утверждение индукции.

1 Докажите, что $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} < \frac{1}{2}$.

2 Дан равносторонний треугольник со сторонами длины 1. За один ход можно увеличить одну из сторон треугольника, но так, чтобы он остался треугольником. Докажите, что после n ходов наибольшая сторона будет не больше $(n+2)$ -го числа Фибоначчи F_{n+2} .

3 Назовем натуральное число равным, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое $n-1$ -значное число можно представить как сумму не более чем n равных чисел.

4 Каждая клетка клетчатой доски $n \times n$ раскрашена в белый или черный цвет. Оказалось, что каждая клетка граничит по стороне ровно с двумя клетками противоположного цвета. Докажите, что раскраска симметрична относительно диагонали.