

7М, спецкурс, листок 24

14 марта 2023

Индукция-3

1 Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город от края до края проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.

В следующих задачах числа Фибоначчи нумеруются так: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots$

2 Что получится, если сложить несколько первых чисел Фибоначчи: $F_1 + F_2 + \dots + F_n$?

3 Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи.

4 Докажите **тождество Кассини** для чисел Фибоначчи: $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = \pm 1$. Когда в этом тождестве плюс, а когда минус?

5 Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ тоже целое.

6 Докажите, что если в числе 12008 между нулями вписать произвольное число троек, то получившееся число будет делиться на 19.

7 В прямоугольнике 3×1543 расставлены красные, желтые и зеленые фишки, по 1543 каждого цвета. Докажите, что фишки в каждой строке можно переставить так, чтобы в каждом столбце все три фишки были разного цвета.

8 На плоскости нарисовано 100 окружностей так, что получилась связная (не распадающаяся на части) картинка. Докажите, что эту картинку можно обвести «одним росчерком», то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

9 Шестеро пиратов делят добытое сокровище. У каждого из них свои представления о прекрасном, поэтому одну и ту же долю разные пираты могут оценивать по-разному. Пират доволен, если по итогам дележа ему досталось не меньше $\frac{1}{6}$ добычи по его собственной оценке. Как действовать пиратам, чтобы в итоге все остались довольны? (Считаем, что сокровище можно делить на сколь угодно мелкие части.)

7М, спецкурс, листок 24

14 марта 2023

Индукция-3

1 Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город от края до края проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.

В следующих задачах числа Фибоначчи нумеруются так: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots$

2 Что получится, если сложить несколько первых чисел Фибоначчи: $F_1 + F_2 + \dots + F_n$?

3 Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи.

4 Докажите **тождество Кассини** для чисел Фибоначчи: $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = \pm 1$. Когда в этом тождестве плюс, а когда минус?

5 Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ тоже целое.

6 Докажите, что если в числе 12008 между нулями вписать произвольное число троек, то получившееся число будет делиться на 19.

7 В прямоугольнике 3×1543 расставлены красные, желтые и зеленые фишки, по 1543 каждого цвета. Докажите, что фишки в каждой строке можно переставить так, чтобы в каждом столбце все три фишки были разного цвета.

8 На плоскости нарисовано 100 окружностей так, что получилась связная (не распадающаяся на части) картинка. Докажите, что эту картинку можно обвести «одним росчерком», то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.

9 Шестеро пиратов делят добытое сокровище. У каждого из них свои представления о прекрасном, поэтому одну и ту же долю разные пираты могут оценивать по-разному. Пират доволен, если по итогам дележа ему досталось не меньше $\frac{1}{6}$ добычи по его собственной оценке. Как действовать пиратам, чтобы в итоге все остались довольны? (Считаем, что сокровище можно делить на сколь угодно мелкие части.)