

Метод математической индукции-2

1 **[а]** Докажите, что любое число от 1 до $2^{n+1} - 1$ можно представить в виде суммы нескольких различных степеней двойки из набора $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$.

[б] На доске выписаны числа $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность — неотрицательное число. Операции прекращаются, когда на доске останется одно число. Докажите, что можно оставить любое нечетное число от 1 до $2^n - 1$.

2 Плоскость разбита на несколько частей прямыми линиями. Докажите, что можно покрасить эти части в черный и белый цвета так, чтобы соседние части были разного цвета.

3 Торт в форме выпуклого многоугольника разрезали ножом по некоторым диагоналям на части (диагонали могут пересекаться). Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдётся хотя бы один чистый кусок.

4 В Зазеркалье все дороги между городами — односторонние, и, выехав из города, вернуться в него нельзя. Докажите, что города можно занумеровать по порядку так, чтобы при проезде по любой дороге номер города увеличивался.

5 **[а]** Найдите ошибку в решении задачи. **[б]** Предложите верное решение. Тупоугольный треугольник разбит отрезками на несколько треугольников. Верно ли, что один из треугольников разбиения обязательно не остроугольный?

Решение: Да, верно. Докажем это индукцией по количеству отрезков.

База: если отрезок один, то он идет из вершины треугольника к противоположной стороне. У этой стороны образуется хотя бы один неострый угол.

Переход: предположим, что если треугольник разбит n отрезками на несколько треугольников, то хотя бы один из них не остроугольный. Проведем $(n + 1)$ -ый отрезок. Он разобьет какой-то треугольник на два новых, один из них обязательно будет не остроугольный. Утверждение доказано.

6 На клетчатой доске 100×100 стоят несколько слонов. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы слоны одинакового цвета друг друга не били.

7★ В купе поезда собрались 10 мудрецов. Окно было открыто, и когда поезд въехал в туннель, в него влетело облако сажи и перепачкало лица семи мудрецам. Поезд выехал из тоннеля, и все увидели испачканные лица других, но были слишком тактичны, чтобы сказать об этом. Грязь же на своем лице никто не почувствовал, и все продолжали считать себя чистыми. В купе вошел проводник и сказал: «Господа, у некоторых из вас перепачканы лица. На каждой станции поезд стоит достаточно долго, так что испачкавшиеся могут выйти и умыться». Несколько станций никто из мудрецов не реагировал, а потом вдруг все грязные встали и пошли умываться.

[а] На какой по счету станции мудрецы поняли, что следует умыться?

[б] Парадокс: если бы проводник промолчал, каждый бы по-прежнему считал себя чистым и умываться не пошел бы. Но ведь каждый видел, что среди них есть испачкавшиеся, так что проводник, казалось бы, ничего нового не сказал. Так что же сказал проводник?

Метод математической индукции-2

1 **a** Докажите, что любое число от 1 до $2^{n+1} - 1$ можно представить в виде суммы нескольких различных степеней двойки из набора $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$.

b На доске выписаны числа $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность — неотрицательное число. Операции прекращаются, когда на доске останется одно число. Докажите, что можно оставить любое нечетное число от 1 до $2^n - 1$.

2 Плоскость разбита на несколько частей прямыми линиями. Докажите, что можно покрасить эти части в черный и белый цвета так, чтобы соседние части были разного цвета.

3 Торт в форме выпуклого многоугольника разрезали ножом по некоторым диагоналям на части (диагонали могут пересекаться). Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдётся хотя бы один чистый кусок.

4 В Зазеркалье все дороги между городами — односторонние, и, выехав из города, вернуться в него нельзя. Докажите, что города можно занумеровать по порядку так, чтобы при проезде по любой дороге номер города увеличивался.

5 **a** Найдите ошибку в решении задачи. **b** Предложите верное решение. Тупоугольный треугольник разбит отрезками на несколько треугольников. Верно ли, что один из треугольников разбиения обязательно не остроугольный?

Решение: Да, верно. Докажем это индукцией по количеству отрезков.

База: если отрезок один, то он идет из вершины треугольника к противоположной стороне. У этой стороны образуется хотя бы один неострый угол.

Переход: предположим, что если треугольник разбит n отрезками на несколько треугольников, то хотя бы один из них не остроугольный. Проведем $(n + 1)$ -ый отрезок. Он разобьет какой-то треугольник на два новых, один из них обязательно будет не остроугольный. Утверждение доказано.

6 На клетчатой доске 100×100 стоят несколько слонов. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы слоны одинакового цвета друг друга не били.

7★ В купе поезда собрались 10 мудрецов. Окно было открыто, и когда поезд въехал в туннель, в него влетело облако сажи и перепачкало лица семи мудрецам. Поезд выехал из тоннеля, и все увидели испачканные лица других, но были слишком тактичны, чтобы сказать об этом. Грязь же на своем лице никто не почувствовал, и все продолжали считать себя чистыми. В купе вошел проводник и сказал: «Господа, у некоторых из вас перепачканы лица. На каждой станции поезд стоит достаточно долго, так что испачкавшиеся могут выйти и умыться». Несколько станций никто из мудрецов не реагировал, а потом вдруг все грязные встали и пошли умываться.

a На какой по счету станции мудрецы поняли, что следует умыться?

b Парадокс: если бы проводник промолчал, каждый бы по-прежнему считал себя чистым и умываться не пошел бы. Но ведь каждый видел, что среди них есть испачкавшиеся, так что проводник, казалось бы, ничего нового не сказал. Так что же сказал проводник?