7М, спецкурс, листок 22

3 марта 2023

Метод математической индукции

Часто бывает, что в задаче требуется доказать серию практически одинаковых утверждений, отличающихся только числами в них.

Принцип математической индукции: если верно первое утверждение, и из n-го утверждения можно вывести $(n+1)$-е, то все утверждения в этой серии верны.

Решение задачи «по индукции» состоит из нескольких шагов:

• Явно сформулировать серию утверждений, которые мы будем доказывать. (Обычно она выглядит как одно утверждение, в котором есть переменная n.)

• Доказать первое утверждение или несколько (**база индукции**).

• Предположить, что n-е утверждение верно (**предположение индукции**).

• Доказать, что в этом случае и $(n+1)$-е утверждение тоже верно (**индукционный переход**).

По принципу математической индукции получится, что все утверждения серии верны.

0 На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в n томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Докажите, что он сможет расставить тома в правильном порядке не более чем за $n-1$ такую операцию.

1 **Ханойская башня.** Есть три стержня, на один из них надета пирамидка из n колец. Кольца можно переносить со стержня на стержень по следующим правилам:

• кольца можно переносить только по одному;

• нельзя откладывать кольца в сторону;

• нельзя класть большее кольцо на меньшее.

a Докажите, что можно переместить всю пирамидку с одного стержня на другой.

b Докажите, что это можно сделать за 2^n-1 ход. Можно ли обойтись меньшим числом ходов?

2 a Трехклеточный уголок увеличили в 2^n раз. Докажите, что получившуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

b Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали произвольную клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.

Переходить к $(n+1)$-му утверждению можно от любого утверждения с меньшим номером, не обязательно от n-го. Но нужно внимательно думать, сколько именно утверждений мы берем в базу.

3 В Стране Дураков в ходу монеты в 3 и 5 тугриков. Докажите, что ими можно заплатить без сдачи любую сумму, начиная с 8 тугриков.

4 Докажите, что квадрат можно разбить на любое число квадратов (не обязательно равных), большее пяти.

5 Для каждого натурального числа от $n+1$ до $2n$ включительно выберем наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Чему будет равна полученная сумма?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Докажем по индукции, что все коровы имеют одну масть.

База: одна корова, разумеется, имеет одну масть.

Переход: пусть мы уже доказали, что в стаде из n коров они все одной масти. Докажем это для стада из $n+1$ коровы. Отделим какую-нибудь корову и отведем ее в сторону. Оставшиеся n коров по предположению индукции одной масти. Теперь вернем корову в стадо и отделим какую-нибудь другую. Получившееся стадо тоже состоит из n коров, а значит они все одной масти. Получается, что корова, которую мы отделяли вначале, той же масти, что и те $n-1$ коров, которых мы не трогали. А значит, все стадо одной масти, что и требовалось доказать.

$\boxed{\mathbf{7}^{\star}}$ На доске в ряд написали натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Каждое из них не превосходит своего номера ($a_n \leq n$), и сумма всех чисел четна. Докажите, что между ними можно расставить плюсы и минусы так, чтобы значение получившегося выражения было равно 0.