7М, спецкурс, листок $21\frac{1}{2}$

28 февраля 2023

Диофантовы уравнения

Этот листочек очень полезный, встречающиеся в нем идеи почти наверняка пригодятся вам в будущем на экзаменах или олимпиадах. Так что, хоть он и дополнительный, порешать его рекомендуется всем.

Определение. Уравнения, у которых необходимо найти только целые решения, называются **диофантовыми**.

Доказать, что у уравнения нет решений, можно, рассмотрев его по какому-нибудь небольшому модулю. Модуль стоит выбирать так, чтобы какая-то часть уравнения обнулилась.

1 Докажите, что уравнения не имеют целых решений:
a $12x+5=y^2$; b $-x^2+7y^3+6=0$.

Если в уравнении встретилось что-то наподобие 2^x или $x!$, то можно попробовать угадать маленькие решения, а затем, рассмотрев уравнение по правильному модулю, доказать, что больших решений нет.

2 Найдите целые неотрицательные решения уравнений (считаем, что $n^0=1$ и $0!=1$)
a $m!+12=n^2$; b $2^x-1=5^y$.

На алгебре мы решали много уравнений, представляя их в виде «произведение нескольких скобок равно 0» и говоря, что одна из скобок равна 0.

Когда нас интересуют только целые решения уравнения, то можно представить его в виде «произведение нескольких скобок равно некоторому целому N». Тогда каждая из скобок является делителем N и можно перебрать все эти делители. Не забывайте, что они могут быть и отрицательными!

3 Найдите все целые решения уравнений:
a $x^2-y^2=31$; b $xy+x+y=3$;

4 Найдите все натуральные решения уравнений:
a $xy+3x-5y=3$; b $2x^2+5xy+3y^2=21$; c $x^2+xy=y+92$.

5 Про натуральные числа a, b, c известно, что $abc+ab+bc+ac+a+b+c=164$. Чему может быть равно abc?

Если сумма нескольких квадратов равна 0, то каждый из квадратов равен 0. Если же сумма нескольких целых квадратов равна небольшому натуральному числу, то каждый из квадратов — сам по себе маленькое число. И можно все эти числа перебрать.

Если полные квадраты не выделяются сразу, то можно попробовать домножить все уравнение на какое-то число.

6 Найдите все целые решения уравнений:
a $x^2+y^2-2x+2y=16$; b $x^2-2xy+2y^2-x=0$.

7М, спецкурс, листок $21\frac{1}{2}$

28 февраля 2023

Диофантовы уравнения

Этот листочек очень полезный, встречающиеся в нем идеи почти наверняка пригодятся вам в будущем на экзаменах или олимпиадах. Так что, хоть он и дополнительный, порешать его рекомендуется всем.

Определение. Уравнения, у которых необходимо найти только целые решения, называются **диофантовыми**.

Доказать, что у уравнения нет решений, можно, рассмотрев его по какому-нибудь небольшому модулю. Модуль стоит выбирать так, чтобы какая-то часть уравнения обнулилась.

1 Докажите, что уравнения не имеют целых решений:
a $12x+5=y^2$; b $-x^2+7y^3+6=0$.

Если в уравнении встретилось что-то наподобие 2^x или $x!$, то можно попробовать угадать маленькие решения, а затем, рассмотрев уравнение по правильному модулю, доказать, что больших решений нет.

2 Найдите целые неотрицательные решения уравнений (считаем, что $n^0=1$ и $0!=1$)
a $m!+12=n^2$; b $2^x-1=5^y$.

На алгебре мы решали много уравнений, представляя их в виде «произведение нескольких скобок равно 0» и говоря, что одна из скобок равна 0.

Когда нас интересуют только целые решения уравнения, то можно представить его в виде «произведение нескольких скобок равно некоторому целому N». Тогда каждая из скобок является делителем N и можно перебрать все эти делители. Не забывайте, что они могут быть и отрицательными!

3 Найдите все целые решения уравнений:
a $x^2-y^2=31$; b $xy+x+y=3$;

4 Найдите все натуральные решения уравнений:
a $xy+3x-5y=3$; b $2x^2+5xy+3y^2=21$; c $x^2+xy=y+92$.

5 Про натуральные числа a, b, c известно, что $abc+ab+bc+ac+a+b+c=164$. Чему может быть равно abc?

Если сумма нескольких квадратов равна 0, то каждый из квадратов равен 0. Если же сумма нескольких целых квадратов равна небольшому натуральному числу, то каждый из квадратов — сам по себе маленькое число. И можно все эти числа перебрать.

Если полные квадраты не выделяются сразу, то можно попробовать домножить все уравнение на какое-то число.

6 Найдите все целые решения уравнений:
a $x^2+y^2-2x+2y=16$; b $x^2-2xy+2y^2-x=0$.