

## 7М, спецкурс, листок 21

14 февраля 2023

### Алгоритм Евклида

В этом листочке вместо НОД( $a, b$ ) мы будем писать просто  $(a, b)$ .

**Лемма.**  $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$ , где  $r \equiv a \pmod{b}$  (например,  $r$  может быть остатком от деления  $a$  на  $b$ ).

**Алгоритм Евклида.** Пусть  $a \geq b$ , и нам нужно найти  $(a, b)$ . Заменяем  $a$  на остаток от деления  $a$  на  $b$ . НОД от этого не изменится. Продолжим так делить большее с остатком на меньшее и заменять большее число на получившийся остаток. Когда одно из чисел уменьшится до нуля, другое станет равно  $(a, b)$ .

- 1 При помощи алгоритма Евклида найдите a  $(720, 378)$ ; b  $(525, 231)$ .
- 2 Какие значения может принимать a  $(n, n + 6)$ ; b  $(2n + 3, 7n + 6)$ ?
- 3 Существует ли натуральное  $n$ , при котором дробь  $\frac{42n + 3}{30n + 2}$  сократима?
- 4 Найдите a  $(2^{32} + 1, 2^{16} + 1)$ ; b  $(2^{91} - 1, 2^{63} - 1)$ ;  
c  $(\underbrace{11 \dots 11}_{100 \text{ единиц}}, \underbrace{11 \dots 11}_{60 \text{ единиц}})$ ; d  $(a^m - 1, a^n - 1)$ .
- 5 Пусть  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots$  — числа Фибоначчи.  
a Найдите  $(F_{101}; F_{100})$ .  
b\* Докажите, что  $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$

## 7М, спецкурс, листок 21

14 февраля 2023

### Алгоритм Евклида

В этом листочке вместо НОД( $a, b$ ) мы будем писать просто  $(a, b)$ .

**Лемма.**  $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$ , где  $r \equiv a \pmod{b}$  (например,  $r$  может быть остатком от деления  $a$  на  $b$ ).

**Алгоритм Евклида.** Пусть  $a \geq b$ , и нам нужно найти  $(a, b)$ . Заменяем  $a$  на остаток от деления  $a$  на  $b$ . НОД от этого не изменится. Продолжим так делить большее с остатком на меньшее и заменять большее число на получившийся остаток. Когда одно из чисел уменьшится до нуля, другое станет равно  $(a, b)$ .

- 1 При помощи алгоритма Евклида найдите a  $(720, 378)$ ; b  $(525, 231)$ .
- 2 Какие значения может принимать a  $(n, n + 6)$ ; b  $(2n + 3, 7n + 6)$ ?
- 3 Существует ли натуральное  $n$ , при котором дробь  $\frac{42n + 3}{30n + 2}$  сократима?
- 4 Найдите a  $(2^{32} + 1, 2^{16} + 1)$ ; b  $(2^{91} - 1, 2^{63} - 1)$ ;  
c  $(\underbrace{11 \dots 11}_{100 \text{ единиц}}, \underbrace{11 \dots 11}_{60 \text{ единиц}})$ ; d  $(a^m - 1, a^n - 1)$ .
- 5 Пусть  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots$  — числа Фибоначчи.  
a Найдите  $(F_{101}; F_{100})$ .  
b\* Докажите, что  $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$