7М, спецкурс, листок ♢

10 февраля 2023

Малая теорема Ферма

Дополнительный листочек

1 Пусть p — простое число, а a — какое-то натуральное число.

a На карусели p сидений. У маляра есть a красок. Сколькими способами он может покрасить сидения карусели? (Раскраски, переходящие друг в друга при повороте карусели, считаются одинаковыми.)

b Выведите из предыдущего пункта **малую теорему Ферма**: для любого целого a и простого p выполняется $a^p \equiv a \pmod p$.

c Докажите, что если a не делится на простое p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

2 Найдите остатки от деления

a 2^{100} на 101; b 7^{102} на 101; c 8^{900} на 29; d 3^{2023} на 43;

3 Найдите все такие простые p, что $5^{p^2}+1$ делится на p.

4 Число $p>2$ простое. Докажите, что 7^p-5^p-2 делится на $6p$.

5 Пусть p и q — различные простые числа, а n не делится ни на p, ни на q. Докажите, что $n^{(p-1)(q-1)}-1$ делится на pq.

6 Пусть $p>5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1 \text{ единиц}}$ делится на p.

7М, спецкурс, листок ♢

10 февраля 2023

Малая теорема Ферма

Дополнительный листочек

1 Пусть p — простое число, а a — какое-то натуральное число.

a На карусели p сидений. У маляра есть a красок. Сколькими способами он может покрасить сидения карусели? (Раскраски, переходящие друг в друга при повороте карусели, считаются одинаковыми.)

b Выведите из предыдущего пункта **малую теорему Ферма**: для любого целого a и простого p выполняется $a^p \equiv a \pmod p$.

c Докажите, что если a не делится на простое p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

2 Найдите остатки от деления

a 2^{100} на 101; b 7^{102} на 101; c 8^{900} на 29; d 3^{2023} на 43;

3 Найдите все такие простые p, что $5^{p^2}+1$ делится на p.

4 Число $p>2$ простое. Докажите, что 7^p-5^p-2 делится на $6p$.

5 Пусть p и q — различные простые числа, а n не делится ни на p, ни на q. Докажите, что $n^{(p-1)(q-1)}-1$ делится на pq.

6 Пусть $p>5$ — простое число. Докажите, что $\underbrace{111\ldots11}_{p-1 \text{ единиц}}$ делится на p.