7М, спецкурс, листок 19

3 февраля 2023

Остатки, степени и зацикливание

Числа 0, 1 и −1 очень удобно возводить в любые степени. Поэтому, если a сравнимо с одним из этих чисел по модулю m, то остаток от деления a^n на m найти легко.

1 Найдите остатки от деления:

a $13^{16}-2^{55}\cdot 5^{15}$ на 3;

b $214^{214}+215^{215}+216^{216}$ на 43;

c $(n^2-1)^{1000}\cdot(n^2+1)^{1001}$ на n;

Бывает полезно заменять число не только на −1 (это не всегда возможно), но и на другие сравнимые с ним отрицательные числа.

2 Какой остаток дает $1003\cdot 3995+2998\cdot 5004$ при делении на 1000?

3 Докажите, что

a $43^{23}+23^{43}$ делится на 66;

b $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 1539\cdot 1541+2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 1540\cdot 1542$ делится на 1543.

4 Найдите a три последние цифры; b шесть последних цифр числа $1^{999}+2^{999}+\cdots+999999^{999}$.

Теорема (о зацикливании)**.** Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние зависит только от предыдущего, она с некоторого момента зациклится.

5 Последовательность начинается с чисел 1, 1. Каждое следующее число в последовательности — это произведение двух предыдущих плюс 1. Делится ли 2023-е число в последовательности a на 4; b на 5?

Утверждение. Пусть a — некоторое целое число. Последовательность остатков от деления a, a^2, a^3, a^4, ... на модуль m зацикливается.

6 Вычислите остатки от деления

a 2^{1543} на 7; b 15^{43} на 11; c $5^{20^{23}}$ на 9.

7 Напоминаем, что *числами Фибоначчи* называется последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., в которой каждое следующее число равно сумме двух предыдущих.

a Докажите, что в ней бесконечное число четных чисел.

b Докажите, что в ней бесконечное число чисел, делящихся на 3.

c Правда ли, что каждое пятое число Фибоначчи делится на 5?

d Как часто в этой последовательности встречаются числа, заканчивающиеся на 0?

Теорема (о зацикливании назад)**.** Если система зацикливается, и ее предыдущее состояние можно однозначно восстановить по последующему (фиксированному числу последующих), то она зацикливается без предпериода.

8 Докажите, что в последовательности Фибоначчи найдется число, которое делится на 1543.

9 a Правда ли, что если $7a \equiv 7b \pmod{1000}$, то $a \equiv b \pmod{1000}$?
b Правда ли, что если $5a \equiv 5b \pmod{1000}$, то $a \equiv b \pmod{1000}$?

10 Пользуясь предыдущим номером, докажите, что существует такое число N, что 7^N оканчивается на 007.