7М, спецкурс, листок 19

27 января 2023

Сравнения по модулю.

В этом листочке все числа целые.

Числа a и b называются **сравнимыми по модулю** m, если они дают одинаковые остатки от деления на m. Пишут $a \equiv b \pmod{m}$.

Теорема (критерий сравнимости)**.** Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда $(a-b) \vdots m$.

Теорема (свойства сравнений)**.**

$\boxed{\text{a}}$ Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.

$\boxed{\text{b}}$ Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

$\boxed{\text{c}}$ Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Следствие. При сложении, вычитании и умножении чисел их остатки от деления на m тоже складываются, вычитаются и умножаются.

Если нас интересует не точный результат вычислений, а только остаток, то при выполнении действий можно сколько угодно раз заменять числа равными им по модулю.

Упражнения

$\boxed{\textbf{1}}$ Заполните таблицы сложения и умножения остатков:

$\boxed{\text{a}}$ по модулю 3:

+	0	1	2
0			
1			
2			

×	0	1	2
0			
1			
2			

$\boxed{\text{b}}$ по модулю 4:

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

×	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

$\boxed{\text{c}}$ по модулю 5:

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

$\boxed{\textbf{2}}$ Не проводя сложных вычислений и не пользуясь калькулятором, найдите остатки от деления:

$\boxed{\text{a}}$ $15 + 43 + 2023$ на 6;

$\boxed{\text{b}}$ $20 \cdot 23 \cdot 1543$ на 6;

$\boxed{\text{c}}$ $150001 \cdot 4300322 + 5700029$ на 8.

$\boxed{\textbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ На какие цифры может заканчиваться полный квадрат?

$\boxed{\text{b}}$ Какие остатки могут давать полные квадраты по модулю 3?

$\boxed{\text{c}}$ по модулю 4? $\boxed{\text{d}}$ по модулю 5?

Задачи

$\boxed{\textbf{1}}$ $\boxed{\text{a}}$ Докажите, что n^3-n делится на 6.

$\boxed{\text{b}}$ Арина сложила 2023 числа. Оказалось, что их сумма делится на 6. Вероника сложила кубы Арининых чисел. Докажите, что ее сумма тоже делится на 6.

Для решения следующих задач нужно рассмотреть их по какому-то модулю. Вам поможет упражнение 3 с лицевой стороны листочка. Условие задачи подскажет вам, какой именно модуль нужно взять.

$\boxed{\textbf{2}}$ Докажите, что если a^2+b^2 делится на 3, то a^2+b^2 делится на 9.

$\boxed{\textbf{3}}$ Целые числа a, b, c, d таковы, что $a^4+b^4+c^4+d^4$ делится на 5. Докажите, что $abcd$ делится на 625.

$\boxed{\textbf{4}}$ Докажите, что уравнение $4x^3-y^2=1$ не имеет целых решений.

$\boxed{\textbf{5}}$ Андрей сложил квадраты пяти последовательных натуральных чисел.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что получившаяся у него сумма делится на 5.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что у него не мог получиться полный квадрат.

А в следующих задачах угадать, какой именно модуль использовать, уже сложнее. Это могут быть модули 3, 4, 5, 10 из упражнения 3, а могут быть и другие небольшие числа.

$\boxed{\textbf{6}}$ Незнайка придумал два натуральных числа, возвёл каждое из них в квадрат и результаты сложил. Получилось 15431543. Докажите, что Незнайка где-то ошибся.

$\boxed{\textbf{7}}$ $\boxed{\text{a}}$ Может ли число 1000...001 быть полным квадратом?

$\boxed{\text{b}}$ Может ли полный квадрат оканчиваться на две нечётные цифры?

$\boxed{\textbf{8}}$ Из задачи про Незнайку мы узнали, что число 15431543 нельзя представить в виде суммы двух квадратов. А в виде суммы трех можно?

<u>Замечание:</u> Знаменитая теорема Лагранжа утверждает, что любое натуральное число можно представить в виде суммы *четырех* квадратов (некоторые из них могут быть нулями). Можете на досуге проверить это утверждение для каких-нибудь небольших чисел.

$\boxed{\textbf{9}}$ Трудолюбивая Юля выписала все простые числа, которые больше 3 и меньше 2023. Не менее трудолюбивая Лиза вычислила значение p^2-1 для каждого Юлиного числа p. Найдите НОД всех Лизиных чисел.

$\boxed{\textbf{10}}$ Найдите все натуральные решения уравнения $n!+5n+13=k^2$.

Дальше идут необязательные задачи.

$\boxed{\textbf{11}}$ Докажите, что уравнение $15x^2-7y^2=9$ не имеет решений в целых числах.

$\boxed{\textbf{12}}$ Найдите все такие натуральные m и n, что $1!+2!+\cdots+n!=m^2$.

$\boxed{\textbf{13}}$ Найдите все такие натуральные x, y, z, что $3^x+4^y=5^z$.