

7М, спецкурс, листок 17

17 января 2023

Деревья-1

Теоремами, сформулированными в этом листочке, можно пользоваться в следующих после них задачах без доказательства. Про доказательства можно подумать, но плюсики за это не будут.

Путь (цикл) в графе называется **простым**, если вершины в нем не повторяются.

Связный граф без простых циклов называется **деревом**.

Теорема. Граф является деревом в том и только том случае, когда любые две его вершины соединены единственным простым путем.

1 Нарисуйте все различные деревья с **a** 4; **b** 5; **c** 6 вершинами.

2 Докажите, что если в дереве удалить любое ребро, то оно распадется ровно на две компоненты связности.

3 В пруд пустили 300 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

4 На столе лежит коробочка, внутри которой находятся 7 коробочек. В некоторых из них лежит по семь коробочек, в некоторых из них тоже лежит по семь коробочек, и так далее, а пустых коробочек получилось всего 49. Сколько всего коробочек?

Вершина степени 1 в дереве называется **листом** или **висячей вершиной**.

Теорема. Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть хотя бы два листа.

5 На лекции вам расскажут, почему в дереве есть хотя бы один лист. После этого завершите доказательство теоремы самостоятельно.

Теорема (об остовном дереве). В любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы получилось дерево.

6 В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно закрыть на ремонт некоторую станцию и запретить проезд через неё так, что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую.

7 В графе есть вершина степени 43. Докажите, что в нем можно удалить какие-то 43 вершины (вместе с исходящими из них ребрами) так, что граф останется связным.

Расстояние от данной вершины графа до самой дальней от неё называется **эксцентриситетом** этой вершины. Вершина графа, имеющая наименьший эксцентриситет, называется **центральной**.

8 **a** Докажите, что если в дереве удалить все листья, то эксцентриситеты всех вершин уменьшатся на 1.

b Граф дорожек парка является деревом. Все дорожки имеют одинаковую длину. Администрация хочет на одном из перекрёстков установить медпункт так, чтобы расстояние от медпункта до самой дальней точки парка было как можно меньше. Докажите, что такой перекрёсток либо один, либо два соседних.

Теорема. У дерева либо только одна центральная вершина, либо две соседние.

7М, спецкурс, листок 17

17 января 2023

Деревья-1

Теоремами, сформулированными в этом листочке, можно пользоваться в следующих после них задачах без доказательства. Про доказательства можно подумать, но плюсики за это не будут.

Путь (цикл) в графе называется **простым**, если вершины в нем не повторяются.

Связный граф без простых циклов называется **деревом**.

Теорема. Граф является деревом в том и только том случае, когда любые две его вершины соединены единственным простым путем.

1 Нарисуйте все различные деревья с **a** 4; **b** 5; **c** 6 вершинами.

2 Докажите, что если в дереве удалить любое ребро, то оно распадется ровно на две компоненты связности.

3 В пруд пустили 300 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

4 На столе лежит коробочка, внутри которой находятся 7 коробочек. В некоторых из них лежит по семь коробочек, в некоторых из них тоже лежит по семь коробочек, и так далее, а пустых коробочек получилось всего 49. Сколько всего коробочек?

Вершина степени 1 в дереве называется **листом** или **висячей вершиной**.

Теорема. Если в дереве больше одной вершины, то в нем есть хотя бы два листа.

5 На лекции вам расскажут, почему в дереве есть хотя бы один лист. После этого завершите доказательство теоремы самостоятельно.

Теорема (об остовном дереве). В любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы получилось дерево.

6 В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую другую. Докажите, что можно закрыть на ремонт некоторую станцию и запретить проезд через неё так, что по-прежнему можно будет с любой оставшейся станции проехать на любую другую.

7 В графе есть вершина степени 43. Докажите, что в нем можно удалить какие-то 43 вершины (вместе с исходящими из них ребрами) так, что граф останется связным.

Расстояние от данной вершины графа до самой дальней от неё называется **эксцентриситетом** этой вершины. Вершина графа, имеющая наименьший эксцентриситет, называется **центральной**.

8 **a** Докажите, что если в дереве удалить все листья, то эксцентриситеты всех вершин уменьшатся на 1.

b Граф дорожек парка является деревом. Все дорожки имеют одинаковую длину. Администрация хочет на одном из перекрёстков установить медпункт так, чтобы расстояние от медпункта до самой дальней точки парка было как можно меньше. Докажите, что такой перекрёсток либо один, либо два соседних.

Теорема. У дерева либо только одна центральная вершина, либо две соседние.