7М, спецкурс, листок 3
13 сентября 2022

Признаки делимости

Числа a и b дают одинаковый остаток при делении на m тогда и только тогда, когда $(a-b) \vdots m$.

Напоминаем вам, что число, составленное из цифр $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ записывается как $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

Поскольку мы работаем в десятичной системе счисления, то

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots + 10 \cdot a_1 + a_0.$$

$\boxed{\mathbf{0}}$ Докажите, что

$\boxed{\text{a}}$ При делении на 2, на 5 или на 10 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и a_0.

$\boxed{\text{b}}$ При делении на 4 или на 25 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и $\overline{a_1 a_0}$.

$\boxed{\text{c}}$ При делении на 3 или на 9 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

$\boxed{\text{d}}$ При делении на 11 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots \pm a_n$.

Еще чуть-чуть кванторов

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Запишите при помощи кванторов, не используя знака $\vdots$

$\boxed{\text{a}}$ «у любого числа есть делитель»;

$\boxed{\text{b}}$ «число n можно разделить с остатком на число m»;

$\boxed{\text{c}}$ «существует натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы трех квадратов».

$\boxed{\mathbf{2}}$ Какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны?

$\boxed{\text{a}}$ $\forall x \forall y \forall z (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{b}}$ $\forall z \forall y \exists x (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{c}}$ $\forall x \forall y \exists z (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{d}}$ $\forall x \exists y \exists z (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{e}}$ $\exists x \exists y \forall z (x = y \cdot z)$.

Остатки

$\boxed{\mathbf{3}}$ Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 5, 4, 25, 3, 9.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Найдите остаток от деления 1543202266642 $\boxed{\text{a}}$ на 9; $\boxed{\text{b}}$ на 11; $\boxed{\text{c}^*}$ на 99.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{a}}$ Число дает остаток 71 при делении на 90. Какой остаток оно дает при делении на 10? А на 9?

$\boxed{\text{b}}$ Число $666\star15432022\star$ дает остаток 71 при делении на 90. Какие цифры мы заменили звездочками?

$\boxed{\mathbf{6}^{\vee}}$ Докажите, что число $\overline{abc}$ дает тот же остаток от деления на 7, что и $2a+3b+c$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что число $\overline{a00b}$ дает тот же остаток от деления на 13, что и $b-a$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Докажите, что число $\overline{abcdefghi}$ дает тот же остаток от деления на 37, что и $\overline{abc}+\overline{def}+\overline{ghi}$.

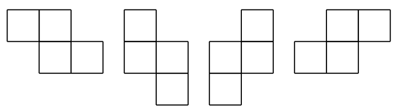
$\boxed{\mathbf{9}}$ Число 2022 разделили с остатком на m. Оказалось, что неполное частное равно остатку. Чему могло быть равно число m?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска 1×13, в клетки которой они по очереди вписывают цифры (начинает Петя, клетки можно заполнять в любом порядке). Если итоговое 13-значное число делится $\boxed{\text{a}}$ на 9; $\boxed{\text{b}^*}$ на 11, то побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Кто победит при правильной игре? (Использовать цифру 0 можно, но получившееся число не должно начинаться с нуля.)

Задачи на шоколадку

$\boxed{\mathbf{3}^{\star}}$ В квадрате 5×5 расставили числа от 1 до 25. Могло ли случиться такое, что в любом «зигзаге» из 4 клеток (см. картинку) сумма чисел делится на 5?



7М, спецкурс, листок 3
13 сентября 2022
Признаки делимости

Числа a и b дают одинаковый остаток при делении на m тогда и только тогда, когда $(a-b) \vdots m$.

Напоминаем вам, что число, составленное из цифр $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ записывается как $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

Поскольку мы работаем в десятичной системе счисления, то

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots + 10 \cdot a_1 + a_0.$$

$\boxed{\mathbf{0}}$ Докажите, что

$\boxed{\text{a}}$ При делении на 2, на 5 или на 10 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и a_0.

$\boxed{\text{b}}$ При делении на 4 или на 25 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и $\overline{a_1 a_0}$.

$\boxed{\text{c}}$ При делении на 3 или на 9 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

$\boxed{\text{d}}$ При делении на 11 число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ дает тот же остаток, что и $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots \pm a_n$.

Еще чуть-чуть кванторов

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Запишите при помощи кванторов, не используя знака $\vdots$

$\boxed{\text{a}}$ «у любого числа есть делитель»;

$\boxed{\text{b}}$ «число n можно разделить с остатком на число m»;

$\boxed{\text{c}}$ «существует натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы трех квадратов».

$\boxed{\mathbf{2}}$ Какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны?

$\boxed{\text{a}}$ $\forall x \forall y \forall z (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{b}}$ $\forall z \forall y \exists x (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{c}}$ $\forall x \forall y \exists z (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{d}}$ $\forall x \exists y \exists z (x = y \cdot z)$;

$\boxed{\text{e}}$ $\exists x \exists y \forall z (x = y \cdot z)$.

Остатки

$\boxed{\mathbf{3}}$ Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 5, 4, 25, 3, 9.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Найдите остаток от деления 1543202266642 $\boxed{\text{a}}$ на 9; $\boxed{\text{b}}$ на 11; $\boxed{\text{c*}}$ на 99.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{a}}$ Число дает остаток 71 при делении на 90. Какой остаток оно дает при делении на 10? А на 9?

$\boxed{\text{b}}$ Число $666\star15432022\star$ дает остаток 71 при делении на 90. Какие цифры мы заменили звездочками?

$\boxed{\mathbf{6}^{\vee}_{-}}$ Докажите, что число $\overline{abc}$ дает тот же остаток от деления на 7, что и $2a+3b+c$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что число $\overline{a00b}$ дает тот же остаток от деления на 13, что и $b-a$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Докажите, что число $\overline{abcdefghi}$ дает тот же остаток от деления на 37, что и $\overline{abc}+\overline{def}+\overline{ghi}$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Число 2022 разделили с остатком на m. Оказалось, что неполное частное равно остатку. Чему могло быть равно число m?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска 1×13, в клетки которой они по очереди вписывают цифры (начинает Петя, клетки можно заполнять в любом порядке). Если итоговое 13-значное число делится $\boxed{\text{a}}$ на 9; $\boxed{\text{b*}}$ на 11, то побеждает Петя, иначе побеждает Вася. Кто победит при правильной игре? (Использовать цифру 0 можно, но получившееся число не должно начинаться с нуля.)

Задачи на шоколадку

$\boxed{\mathbf{3}^{\bigstar}}$ В квадрате 5×5 расставили числа от 1 до 25. Могло ли случиться такое, что в любом «зигзаге» из 4 клеток (см. картинку) сумма чисел делится на 5?