

Подвешивание графа

Это дополнительный листочек. За него можно получить только хорошую оценку.

Иногда граф бывает удобно «подвесить за вершину». Сначала берём корень (то есть вершину, за которую подвешиваем) и определяем его в нулевой (верхний) ярус. Потом все вершины, смежные с корнем, определяем в первый ярус. Потом все вершины, смежные хотя бы с одной вершиной первого яруса, но не вошедшие в нулевой и первый ярус, относим во второй ярус и т. д., пока все вершины не будут определены в свой ярус.

1 В стране некоторые города соединены авиалиниями, причем из города A в город B нельзя попасть, сделав менее 10 пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из A в B будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 авиакомпаниям.

2 В Цветочном городе живёт некоторое число коротышек. В первый день один из них заболел. Если коротышка болеет, то к нему приходят все его здоровые друзья и заражаются (то есть становятся больными в следующий день). Если коротышка один день болел, то он выздоравливает на следующий день, и более того, получает иммунитет на этот день. Коротышка с иммунитетом может навещать друзей без риска заражения. Может ли так случиться, что эпидемия будет продолжаться бесконечно долго?

3 Степень всех вершин графа не меньше n , причем в нем нет циклов длины 3, 4, 5. Докажите, что в нем найдутся $n^2 - n$ вершин, никакие две из которых не соединены ребром.

4 На кружок ходят 53 ученика. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.

5 В стране 2023 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками.