

7М, спецкурс, листок 15

27 декабря 2022

Графский разнобой.

1 футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой другой ровно по разу.

a Могут ли все команды сыграть вничью разное число матчей?

b Могут ли все команды одержать разное число побед?

2 В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что один из этих двух видов транспорта позволяет добраться из любого города в любой (возможно с пересадками).

3 Ковбои всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 ковбоев, и каждый сказал каждому из присутствующих одну из двух фраз: «У меня чётное число знакомых в этой компании» или «У меня нечётное число знакомых в этой компании».

a Могло ли оказаться, что первая фраза произнесена ровно 2023 раза?

b Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

4 В Разноцветной стране 6 городов. Любые два соединены дорогой либо из желтого кирпича, либо из красного булыжника. Докажите, что найдутся три города, соединенных одинаковыми дорогами.

5 Докажите, что в группе из 6 человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

6 17 ученых из разных стран мира переписываются на одном из трех языков. Докажите, что среди них найдутся трое, которые переписываются на одном языке.

7 Можно ли раскрасить ребра полного графа с 9 вершинами в **a** 8 цветов;

b 9 цветов так, чтобы ребра, имеющие общий конец, были разных цветов?

c Какое минимальное количество цветов требуется, чтобы так раскрасить ребра полного графа с 10 вершинами?

8 Существует ли граф со 100 вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . , 49, 49, 50, 50?

9 Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы пять друзей, а у любых двух — ровно два общих друга?

7М, спецкурс, листок 15

27 декабря 2022

Графский разнобой.

1 футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой другой ровно по разу.

a Могут ли все команды сыграть вничью разное число матчей?

b Могут ли все команды одержать разное число побед?

2 В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что один из этих двух видов транспорта позволяет добраться из любого города в любой (возможно с пересадками).

3 Ковбои всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 ковбоев, и каждый сказал каждому из присутствующих одну из двух фраз: «У меня чётное число знакомых в этой компании» или «У меня нечётное число знакомых в этой компании».

a Могло ли оказаться, что первая фраза произнесена ровно 2023 раза?

b Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

4 В Разноцветной стране 6 городов. Любые два соединены дорогой либо из желтого кирпича, либо из красного булыжника. Докажите, что найдутся три города, соединенных одинаковыми дорогами.

5 Докажите, что в группе из 6 человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

6 17 ученых из разных стран мира переписываются на одном из трех языков. Докажите, что среди них найдутся трое, которые переписываются на одном языке.

7 Можно ли раскрасить ребра полного графа с 9 вершинами в **a** 8 цветов;

b 9 цветов так, чтобы ребра, имеющие общий конец, были разных цветов?

c Какое минимальное количество цветов требуется, чтобы так раскрасить ребра полного графа с 10 вершинами?

8 Существует ли граф со 100 вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . , 49, 49, 50, 50?

9 Можно ли подобрать компанию, где у каждого ее члена было бы пять друзей, а у любых двух — ровно два общих друга?