

## 7М, спецкурс, листок 14

20 декабря 2022

### Двудольные графы

**Двудольным** называется граф, вершины которого можно разбить на две группы (**доли**) так, что каждое ребро соединяет вершины из разных долей.

Во всех задачах этого листочка постарайтесь сначала сформулировать, что в них является графом, и почему он двудольный.

#### Подсчет ребер двумя способами

**1** В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько там девочек, и сколько мальчиков, если всего учеников 24?

**2** В школьной столовой продается первое, второе и десерт. Обслуживая учеников 7М класса, повар заметил, что каждый из них взял либо 1, либо все 3 блюда, а каждое блюдо взяло нечётное число учеников. Докажите, что кто-то из 26 учеников 7М вообще не пообедал.

**3** Можно ли поставить на бесконечную клетчатую доску 25 коней так, чтобы каждый бил ровно 4 других?

#### Раскраска

*Вершины двудольного графа можно покрасить в два цвета так, что концы каждого ребра будут разных цветов (такая раскраска называется **правильной**).*

**4** Вершины графа — шестизначные числа. Два числа связаны ребром, если у них на пяти позициях цифры совпадают, а на одной отличаются на 1. Двудолен ли этот граф?

**5** На плоскости нарисовано несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников, у каждого из которых есть горизонтальная сторона. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

**6** Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

#### Обходы и чередования

**Путем** в графе называется последовательность вершин, каждая из которых соединена со следующей ребром.

**Цикл** — это замкнутый путь.

*В двудольном графе на любом пути вершины из одной доли и из другой чередуются.*

**7** У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

8 Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Юля прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Юля была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Юля на клетке 10?

9 На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 1543 прыжка?