

Вспоминаем графы. Степени вершин и подсчет ребер.

Графом называется набор объектов (**вершин**), некоторые пары которых находятся в каком-то отношении (соединены **ребрами**).

0 Ювелиру заказали сделать из бриллиантов массаами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 карат такое ожерелье, чтобы сумма масс никаких двух соседних бриллиантов не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7. Сколько у ювелира способов выполнить заказ?

Типичные формулировки — верёвки, города и дороги, дружба, знакомство. А что является вершинами и что рёбрами в задачах 3 и 6? Попробуйте перевести задачи 3, 5, 6 на «графский» язык. Задача 5 точно про граф в смысле написанного определения?

Граф **связный**, если между любыми двумя его вершинами есть цепочка ребер.

Граф состоит из одной или нескольких **компонент связности**. Каждая компонента является связным графом, а между разными компонентами ребер нет.

Степенью вершины графа называется количество выходящих из нее ребер.

Лемма (о рукопожатиях). Сумма степеней всех вершин графа четна. Иными словами, в любом графе четное число вершин нечетной степени.

Пример 1. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

Пример 2. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства одно, пять или девять соседних баронств?

8 В графе n вершин, любые две из которых соединены ребром (такой граф называется **полным**). Сколько в нем ребер?

9 Могут ли степени вершин в графе быть равны

a 5, 3, 3, 2, 1; **b** 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2; **c** 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6;

d 8, 8, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 2?

10 В графе из каждой вершины выходит по 7 рёбер. Может ли в нём быть 1543 вершины? А может ли быть 1543 ребра?

11 В связном графе степени всех вершин четны. Одно ребро стерли. Докажите, что граф остался связным.

12 На конгресс съехались физики и лирики. Каждый физик знаком с 5 физиками и 10 лириками, а каждый лирик — с 9 физиками и 6 лириками.

a Кого больше, физиков или лириков, и во сколько раз?

b Какое минимальное число ученых могло быть на этом конгрессе?

13 На шахматную доску 8×8 по одному выставляются короли: первый — на любую клетку, а каждый следующий должен побить нечетное число ранее выставленных королей. Можно ли заполнить все клетки доски?