7М, спецкурс

Процессы. Зачет 13 декабря 2022. Программа.

В билете будет несколько задач из приведенного списка и несколько новых задач

1 Теоремы о зацикливании вперед и назад.

2 В городе Энске есть несколько площадей, соединенных улицами. От каждой площади отходит ровно три улицы. Участник соревнований по городскому ориентированию стартовал на площади Революции и ходит по улицам, на каждой площади сворачивая поочередно то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он вернется на площадь Революции.

3 Приведите пример задачи (условие и решение), в которой инвариантом является сумма (или какое-то её свойство).

4 Приведите пример задачи (условие и решение), в которой инвариантом является произведение (или какое-то его свойство).

5 Приведите пример задачи (условие и решение), в которой инвариант связан с чётностью.

6 Приведите пример задачи (условие и решение), в которой инвариант связан с делимостью или остатками (но не только с чётностью).

7 Приведите пример задачи (условие и решение), в которой инвариант связан с раскраской.

8 Что такое счётчик? Какие два факта надо заметить (доказать), чтобы с помощью счётчика доказать конечность процесса?

9 Приведите пример задачи (условие и решение), где с помощью счётчика доказывается, что процесс закончится.

10 Приведите пример задачи (условие и решение), где с помощью счётчика оценивается, через сколько ходов процесс наверняка закончится.

11 Приведите пример задачи (условие и решение), где с помощью счётчика доказывается, что можно добиться нужного результата.

12 Приведите пример задачи (условие и решение), где сначала строится произвольная конструкция, а потом она постепенно улучшается до победного конца.

13 На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?

14 a В строку в беспорядке записаны по разу числа 1, 2, 3, . . . , 16. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

b Докажите, что если числа стоят по убыванию, то меньше чем 120 ходами не обойтись.

$\boxed{\mathbf{15}}$ В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.

$\boxed{\mathbf{16}}$ В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

$\boxed{\mathbf{17}}$ При дворе короля Артура собрались 20 рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более 9 врагов. Докажите, что Мерлин может так рассадить рыцарей за Круглый Стол, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.