7M, спецкурс, листок 12

1 декабря 2022

Полуинварианты и счетчики-2

Обычно счётчик — это величина, которая не может меняться бесконечно долго, так как она:

1) меняется на каждом шаге не менее чем на 1 в нужную сторону;

2) не может перейти некоторую границу.

Счётчик помогает доказать конечность процесса в следующих случаях:

Дана система. Сказано, как она меняется. Надо доказать, что это не может продолжаться бесконечно долго. А иногда и оценить количество шагов.

1 a) На доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать?

b) Королю разрешили еще ходить вправо–вниз по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.

2 К натуральному числу, написанному на доске, разрешается прибавлять одну треть или одну седьмую его текущего значения. Докажите, что число когда-нибудь перестанет быть натуральным.

3 По окружности расставлены n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записывают их наибольший общий делитель. После этого исходные числа стирают, а с оставшимися проделывают то же самое. Докажите, что через несколько шагов все числа станут равными.

Дана система. Сказано, как она может меняться. Спрашивается, можно ли достичь желаемого результата.

Сложность в том, что ответ неизвестен ☺. Доказать, что можно, помогает счётчик (полуинвариант). А что нельзя – инвариант.

4 В клетки таблицы $m \times n$ вписаны числа. Разрешается менять знак у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца. Всегда ли можно таким образом добиться того, что суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, станут неотрицательными?

5 Вика написала длинное число из нулей и единиц 10101010101010. Вероника может вставить в любое место Викиного числа 1010 или зачеркнуть кусочек 01. Сможет ли она такими операциями получить 01?

Допустим, вам нужно доказать существование большой конструкции. Есть два разных подхода:

1) Постепенно наращивать конструкцию, строя ее ***сразу как надо****. Корректность алгоритма иногда можно доказывать напрямую (как в задаче №12 про разноцветные стеклышки), а иногда — от противного (как в задаче №13 про красные, зеленые и синие точки на окружности).*

2) Сначала сделать как попало, а затем постепенно ***улучшать там, где плохо.*** *Показать, что процесс улучшения не может продолжаться до бесконечности, нам поможет полуинвариант (как в задаче №8 про парламент).*

$\boxed{\mathbf{6}}$ В наборе имеется несколько гирь, каждая не более 20 г. Докажите, что эти гири можно положить на две чашки весов так, чтобы одна чашка весов была легче другой не более чем на 20 г.

$\boxed{\text{а}}$ В наборе имеется 100 гирь, каждые две из которых отличаются по массе не более чем на 20 г. Докажите, что эти гири можно положить на две чашки весов так, чтобы одна чашка весов была легче другой не более чем на 20 г.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Двенадцать стульев стоят в ряд. Иногда на один из свободных стульев садится человек. При этом ровно один из его соседей (если они были) встаёт и уходит. Какое наибольшее количество человек могут одновременно оказаться сидящими, если вначале все стулья были пустыми?

$\boxed{\mathbf{8}}$ В $2n$ точках окружности расставлены в некотором порядке числа $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Докажите, что эти $2n$ точек можно соединить n непересекающимися хордами так, что если для каждой хорды вычислить разность чисел, стоящих в её концах (из большего числа вычитается меньшее), то сумма полученных разностей будет равна n^2.

$\boxed{\mathbf{9}}$ В некоторой стране из каждого города выходит нечётное число дорог. На центральной площади каждого города поднят чёрный или белый флаг. Каждое утро в одном из городов, у которого число соседей с флагами другого цвета больше половины, меняют цвет флага. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

$\boxed{\mathbf{10}}$ При дворе короля Артура собрались 20 рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более 9 врагов. Докажите, что Мерлин может так рассадить рыцарей за Круглый Стол, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.