

*Кванторы и деление с остатком***Кванторы**

**Определение.** Значок  $\exists$  называется *квантором существования* и читается как «существует», «для какого-то».

Например, утверждение «существует число, делящееся на 2» можно записать как  $\exists x(x : 2)$ .

Если хочется несколько переменных, то кванторов может быть больше одного: «существуют два числа, первое из которых делится на второе»:  $\exists x \exists y(x : y)$ .

В логических формулах пишутся сначала кванторы, потом условие. Кванторы читаются слева направо.

**Определение.** Значок  $\forall$  называется *квантором всеобщности* и читается «для всех», «для каждого».

Например, на математическом языке утверждение (неверное) «каждое число делится на 2» можно записать как  $\forall x(x : 2)$ .

Кванторы можно комбинировать:  $\forall x \exists y(x : y)$  «Для каждого числа  $x$  существует такой  $y$ , что  $x$  делится на  $y$ ».

**1** Прочитайте, что тут написано и определите верные утверждения (мы считаем, что все числа целые):

**a**  $\forall x(|x| > 0)$

**b**  $\exists x(x^3 : 32874)$

**c**  $\exists x \forall y(y : x)$

**d**  $\forall x \exists y(x/y - \text{простое число})$

**2<sup>v</sup>** Запишите на языке кванторов

**a** «произведение любого числа и нуля равно нулю»;

**b** «существует число, квадрат которого равен 1543»;

**c** «для каждого числа существует противоположное ему»;

**d** « $x$  делится на  $y$ » (не используйте значок  $:$ ).

**3** Порядок кванторов важен. Придумайте условие  $P(x, y)$  (грубо говоря, некоторое условие, использующее  $x$  и  $y$ ), что  $\forall x \exists y P(x, y)$  – верно, а  $\exists y \forall x P(x, y)$  – нет.

# Деление с остатком

**Определение.** Разделить целое число  $a$  с остатком на целое число  $b \neq 0$  — это значит представить  $a$  в виде

$$a = b \cdot q + r, \text{ где } 0 \leq r < |b|.$$

Число  $q$  в этом случае называется *неполным частным*, а число  $r$  — *остатком*.

**4<sup>v</sup>** (Все пункты сдаются вместе) Разделите с остатком

**a** 43 на 15;      **b** 43 на  $-15$ ;      **c**  $-43$  на 15;      **d**  $-43$  на  $-15$ .

**5** Число  $a$  разделили на 215 и получили в остатке 86. Делится ли  $a$  на 43? А на 5?

**6** **a** Докажите, что если  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $c$ , то  $(a - b) : c$ .

**b** Докажите, что если  $(a - b) : c$ , то  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $c$ .

**7** Делимое и делитель увеличили в 2022 раза. Как изменились неполное частное и остаток?

**8** Число  $a$  при делении на положительное число  $b$  дает неполное частное  $q$  и остаток  $r$ . А какое неполное частное и какой остаток получатся при делении  $-a$  на  $b$ ?

**9** Найдите наименьшее натуральное число (не равное одному), которое дает остаток 1 при делении на 2, 3, 5, 7.

**10** Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

**11** У скупого рыцаря есть 5 сундуков с золотом: в первом сундуке 1001 золотая монета, во втором — 2002, в третьем — 3003, в четвертом — 4004, в пятом — 5005. Каждый день скупой рыцарь выбирает 4 сундука, забирает из них по 1 монете и перекладывает в оставшийся сундук. Спустя какое-то время в первом сундуке не осталось монет, а еще в одном сундуке было ровно 2022 монеты. В каком?

**12** Тридцать три богатыря нанялись охранять Лукоморье за 240 монет. Хитрый дядька Черномор может разделить богатырей на отряды произвольной численности (или записать всех в один отряд), а затем распределить всё жалованье между отрядами. Каждый отряд делит свои монеты поровну, а остаток отдаёт Черномору. Какое наибольшее количество монет может достаться Черномору, если:

**a** жалованье между отрядами Черномор распределяет как ему угодно;

**b** жалованье между отрядами Черномор распределяет поровну?