

Полуинварианты и счетчики

Счетчиком называется величина, показывающая, насколько процесс близок к завершению (насколько мы близки к цели).

0 На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?

1 (Разбор в конце занятия) В фирме работает 10 сотрудников с разными зарплатами. Каждый месяц владелец повышает зарплату на 1 рубль ровно девятерым (по своему выбору). Как директору повышать зарплаты, чтобы сделать их одинаковыми? (Зарплата — целое число рублей.)

2 На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Верхняя грань испачкана. Кубик прокатили по доске, перекатывая через рёбра, так, что он побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что испачканная грань ни разу не лежала на доске?

3 а Каждая клетка доски 8×8 чёрная или белая. За ход можно перекрасить все клетки в одной строке или одном столбце в противоположные цвета. Всегда ли можно за несколько ходов сделать доску одноцветной?

б Каждая клетка доски 8×8 чёрная или белая. За ход можно любой прямоугольник из трёх клеток перекрасить в тот цвет, которого в нём больше. Всегда ли можно за несколько ходов сделать всю доску одноцветной.

4 а В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \dots, 16$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

б Докажите, что если числа стоят по убыванию, то меньше чем 120 ходами не обойтись.

5 Кольцевой шнур пропущен сквозь набор колец разного размера с номерами от 1 до 43. Кольца расположены в беспорядке. Их можно свободно двигать вдоль шнура, но поменять местами (продев одно в другое) можно только если номера колец отличаются на 2 или больше. Докажите, что кольца можно расположить в порядке возрастания номеров от кольца 1 по часовой стрелке.

Полуинвариантом называется величина, которая в течение процесса меняется только в одну сторону.

6 На доске написаны неотрицательные числа a, b, c, d . Их стерли и вместо них написали $a + b, b + c, c + d, d + a$. Эту операцию повторили еще несколько раз и получили исходные числа. Найдите их.

7 В клетках таблицы 1543×1543 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.

8 В парламенте каждый депутат имеет не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разделить на две палаты так, что у каждого депутата будет не более одного врага внутри палаты.

9 На поле 15×15 в некоторых клетках росли сорняки. Если хотя бы в двух клетках, соседних по стороне с клеткой X , растут сорняки, то на следующий день в X тоже вырастает сорняк. Через некоторое время сорняками заросло все поле. Какое минимальное число сорняков могло быть изначально?